Nachrichten

von

der Gesellschaft der Wissenschaften

zu

Göttingen

aus dem Jahre

1929

Mathematisch-Physikalische Klasse

BERLIN

Weidmannsche Buchhandlung

1929

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)
in Göttingen.

Register

über die

Nachrichten

von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

aus dem Jahre 1929.

Mathematisch-Physikalische Klasse.

(Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem.)

Über die Dispersion des Quecksilberdampfes im Ultraviolett und über einen quantitativen Zusammenhang zwischen Dispersion und Absorption[1]).

Von

Rudolf Ladenburg.

Vorgelegt von M. Born in der Sitzung am 8. März 1929.

Nach der heutigen Dispersionstheorie ist die Dispersion einatomiger Gase und Dämpfe quantitativ berechenbar, wenn die Eigenfrequenzen ν_0- — die Absorptionsstellen — und die zugehörigen f_0-Werte bekannt sind — das sind die Zahlen der den Frequenzen ν_0 entsprechenden Dispersionselektronen $\mathfrak{N}$ pro Atom. Tatsächlich sind zwar meist die ν_0 —, aber nur in wenigen Fällen die f_0-Werte bekannt. Man berechnet daher meist umgekehrt die f_0-Werte aus Dispersionsmessungen, indem man mit möglichst wenigen ν_0-Werten, also möglichst wenigen Gliedern in der Dispersionsformel auszukommen sucht[2]). Dies Verfahren ist aber nur als ein vorläufiges anzusehen und nur so lange zulässig, als die Dispersion in großem Abstande von den Absorptionsstellen gemessen ist. Die Aufgabe, zu deren Lösung die vorliegende Arbeit einen ersten Beitrag liefern soll, ist, die Dispersion einatomiger Gase und Dämpfe unter wohldefinierten Bedingungen von Druck und Temperatur in einem möglichst großen Druckintervall bis in die Nähe der Absorptionsstellen zu messen. Auf diese Weise kann man die verschiedenen f_0-Werte einzeln bestimmen und nun versuchen, die Dispersion gemäß der vorliegenden Theorie zu berechnen. Der Vergleich der theoretischen mit den experimentell gefundenen Werten erlaubt eine scharfe Prüfung der Theorie.

---

1) Nach einem Vortrag auf dem Gautag des Gauvereins Niedersachsen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 16. Febr. 1929.

2) Vgl. R. Ladenburg u. F. Reiche, Naturwiss. 11, 584, 1923; K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf, Ann. d. Phys. 76, 71, 1925 etc.

Zur Lösung der genannten Aufgabe habe ich gemeinsam mit Herrn G. Wolfsohn Dispersionsversuche im Ultraviolett mit einem Jaminschen Interferentialrefraktor aus Quarz begonnen. Als erstes Objekt der Untersuchung haben wir Quecksilberdampf gewählt, da seine Hauptabsorptionsstellen bei 2537 ($^1S_0 - {}^3P_1$) und bei 1849 Å ($^1S_0 - {}^1P_1$) im relativ leicht erreichbaren $U-V$ liegen. Allerdings liegt die Grenze der Hauptserie bei 1190 Å, und dieses Spektralgebiet kann mit den bisher vorhandenen Mitteln nicht erreicht werden.

Um den Quecksilberdampf unter den gewünschten Bedingungen zu untersuchen, müssen die optisch exakt planparallelen Verschlußplatten von 20 mm Durchmesser mit den Quarzrohren verschmolzen sein, ohne daß die Planparallelität geschädigt wird. Dies macht gewisse Schwierigkeiten, ist aber ausführbar und erlaubt dann, auch hohe Temperaturen zu verwenden.

Unsere bisherigen Messungen in der Nähe der Linie 2537 liefern im Gegensatz zu älteren Versuchen von R. W. Wood [1]) und von F. Klingamann [2]) eine genaue Proportionalität des Brechungsvermögens $n-1$ in der Umgebung der Linie 2537 mit dem Druck zwischen 0.02 und 32 mm; genauer gesagt, die aus der Verschiebung der Interferenzstreifen bezw. aus dem Abstande der „Haken“ (nach der von Roschdestwensky angegebenen Methode) berechnete Zahl $\mathfrak{N}$ der Dispersionselektronen ergibt sich innerhalb der Meßfehler von vorläufig einigen Prozent in den genannten Druckgrenzen proportional der Zahl N der Quecksilberatome [3]). Der so berechnete Wert f ist gleich

$$f_{2537} = \frac{\mathfrak{N}}{N} = 0.0255.$$

Aus diesem Wert kann man nach der von mir ursprünglich auf energetischem Wege abgeleiteten Beziehung, die dann korrespondenzmäßig und quantenmechanisch tiefer begründet wurde, nämlich auf Grund der Formel

$$f = A_{ki} \frac{\tau}{3} \frac{g_k}{g_i}$$

die spontane Übergangswahrscheinlichkeit A_{ki} des der Linie 2537 entsprechenden Quantensprunges $k-i$ berechnen, da die Abklingungszeit eines klassischen Oszillators der Frequenz $\nu_0 = \dfrac{3 . 10^{10}}{2{,}537 . 10^{-5}}$

$$\tau = \frac{3\, m\, c^3}{8\, \pi^2\, e^2\, \nu_0^2},$$

---

1) Phil. Mag. April 1913. 2) Phys. Rev. 28, 665, 1926.

3) Zwischen 0.02 und 0.004 mm zeigte sich eine geringe Zunahme des f-Wertes, deren Ursache zur Zeit noch untersucht wird.

sowie die Quantengewichte g_k und g_i bekannt sind; es ist

$$\tau = 2.90 . 10^{-9} \text{ und } \frac{g_k}{g_i} = 3.$$

Daher wird $A_{ki} = 0.9 . 10^7$ und da der höhere Zustand $^3P_1$ der Linie nur mit dem Zustand $^1S_0$ kombiniert, ist der reziproke Wert von A_{ki}

$$\frac{1}{A_{ki}} = 1.1 . 10^{-7} = T$$

zugleich die mittlere Lebensdauer des Zustandes $^3P_1$. Andererseits ist diese Zeit sowohl durch Versuche von Wien über das Abklingleuchten der Kanalstrahlen als durch Messungen der Magnetorotation der Resonanzstrahlen von Hanle bestimmt, und es ist beide Male ein Wert von $1 . 10^{-7}$ erhalten worden. Diese Übereinstimmung ist eine wichtige quantitative Bestätigung der oben genannten Beziehung zwischen Dispersion und Übergangswahrscheinlichkeit [1]).

Noch auf eine zweite Weise ist diese Beziehung prüfbar, da man die Größe f auch aus Absorptionsmessungen erhalten kann. In der Tat ist ja quantenmäßig die Absorption durch die Wahrscheinlichkeit eines erzwungenen Überganges von niederen zum höheren Energiezustand bestimmt [2]), und diese ist mit der spontanen Übergangswahrscheinlichkeit A_{ki} durch eine bekannte Beziehung von Einstein verknüpft, die außer universellen Konstanten nur die Quantengewichte und die Eigenfrequenz enthält.

Andererseits ist in der Sprache der klassischen Elektronentheorie die Absorption wieder durch die Zahl $\mathfrak{N}$ der Dispersionselektronen bestimmt, sei es, daß man die „Gesamtabsorption“ mißt, die ein schmaler Bereich eines kontinuierlichen Spektrums im Gebiet der Absorptionslinie erfährt, sei es, daß man die „Linienabsorption“ untersucht, die eine der Absorptionslinie identische Emissionslinie im absorbierenden Dampf erleidet [3]). Erstere Methode haben Füchtbauer, Joos und Dinkelacker [4]) beim Quecksilberdampf an der Linie 2537 angewandt, wobei sie allerdings fremde Gase hohen Drucks (10—50 Atm.) zusetzen mußten, um die Absorptions-

1) Diese ist bisher erst in einem einzigen Falle quantitativ geprüft und bestätigt worden, u. zwar am Natriumdampf durch Untersuchungen von R. Ladenburg und R. Minkowski. Vgl. z. B. Naturw. 14, 1208, 1926.

2) Vgl. hierzu Ch. Füchtbauer, Phys. Zs. 21, 322, 1920.

3) Vgl. R. Ladenburg u. F. Reiche, Ann. d. Phys. 42, 181, 1913; Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 24. 2. 1914; C. R. 158, 1788, 1914.

4) Ann. d. Phys. 71, 204, 1924.

linie so stark zu verbreitern, daß die Absorption exakt meßbar wurde. Da sich die aus $\int n\varkappa d\nu$ — wobei $n\varkappa$ den Absorptionsindex einer unendlich dünnen Schicht bedeutet — berechneten $\mathfrak{N}$- und f-Werte mit dem Druck des Fremdgases ändern (ohne daß bisher eine befriedigende theoretische Deutung dieser Erscheinung gefunden worden ist), muß man die gemessenen Werte auf den Druck Null des Fremdgases extrapolieren. Dadurch entsteht eine gewisse Unsicherheit, aber der erhaltene Wert[1]) $f = 0.025$ ist mit dem von uns aus Dispersionsmessungen bestimmten f-Werte in guter Übereinstimmung.

Eine weitre Prüfung erlauben Messungen der „Linienabsorption“, bei denen die Absorption der Strahlung einer Resonanzlampe in einer Schicht Quecksilberdampf gleicher Temperatur und Dicke untersucht wird. Solche Messungen sind auf meine Veranlassung von H. KOPFERMANN und W. TIETZE zwischen -11 und $+20^0$ ausgeführt worden. Ähnliche Messungen wurden kürzlich von P. KUNZE veröffentlicht[2]). Die Ergebnisse beider Meßreihen stimmen bis auf kleine Unterschiede (auf die in der demnächst erscheinenden ausführlicheren Arbeit der Herren KOPFERMANN und TIETZE näher eingegangen werden wird) miteinander überein. Als Endresultat ergibt sich im Druckintervall 7.10^{-5} bis $1.4.10^{-3}$ der Wert $f = 0.0055_5$. Bei der Diskussion dieser Zahl muß man, worauf KUNZE bereits hinweis, berücksichtigen, daß die Linie 2537 nach neueren Untersuchungen aus fünf nahe gleich starken Teillinien besteht, die einen Abstand von etwa 0.01 Å voneinander haben und bei Zimmertemperatur eine Halbweite von etwa 0.002 Å besitzen. Daher wird bei der Messung der Linienabsorption jede Teillinie nur von der ihr entsprechenden absorbiert und der gefundene f-Wert ist ein Mittelwert des f-Wertes der Teillinien, und zwar das algebraische Mittel, wenn die fünf Teillinien genau gleiche Intensität haben. Die Messung der Dispersion und der „Gesamtabsorption“ hingegen liefert zweifellos die Summe der f-Werte aller fünf Teillinien. Multipliziert man nun 0.0055_5 mit fünf, so ergibt sich 0.027_8 in naher Übereinstimmung mit dem gemessenen Dispersionswert[3]).

---

1) Die Verfasser haben die KNUDSENschen Dampfdrucke benutzt, die etliche Prozent kleiner sind als die von uns benutzten, im LANDOLT-BÖRNSTEIN angegebenen Mittelwerte, und haben daher einen etwas größeren Wert von f berechnet. Da unsere Dispersionsmessungen bei höheren Drucken als die Absorptionsmessungen ausgeführt wurden, ist die Unsicherheit der Dampfdrucke beim Vergleich der erhaltenen f-Werte zu berücksichtigen.

2) Ann. d. Phys. 85, 1014, 1928.

3) Die Abweichung von 10 % ist vielleicht reell und beruht auf der geringen

Hiermit ist wohl zum ersten Mal der sowohl von der Elektronen- wie von der Quantentheorie geforderte quantitative Zusammenhang zwischen Stärke der Dispersion und Stärke der Absorption exakt bewiesen[1]). Dabei ist die Dispersion ganz außerhalb der Absorptionslinien, die Linienabsorption dagegen innerhalb des schmalen Bereichs der Linien selbst ($\sim$ 0.002 Å) gemessen!

Auf die eingangs aufgeworfene Frage der absoluten Berechnung des Brechungsquotienten können die bisher vorliegenden Ergebnisse noch keine Antwort geben. Doch macht sich bereits bei 9 mm Druck der Einfluß der Linie 1849 bis in die Nähe der Linie 2537 deutlich bemerkbar und bewirkt hier eine meßbare Verschiebung der Interferenzstreifen; für den f-Wert der Linie 1849 ergibt sich aus den bisherigen Messungen zwischen 3000 und 2300 Å $f \sim 1$. Daß hier der f-Wert soviel größer als an der Linie 2537 ist, hängt damit zusammen, das letztere Linie eine Interkombinationslinie ($^1S_0 - {}^3P_1$), erstere dagegen eine Singlet-Singletlinie ($^1S_0 - {}^1P_1$) ist. Aus dem gefundenen f-Wert berechnet sich die zugehörige mittlere Lebensdauer des Zustandes $^1P_1$ zu $1{,}4 . 10^{-9}$.

Die beschriebenen Versuche wurden vom Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft und von dem Kaiser Wilhelm-Institut für Physik in dankenswertester Weise durch Gewährung von Geldmitteln und Apparaten unterstützt.

Ungleichheit der Intensität der fünf Teillinien (vgl. außerdem Anm. 1 voriger Seite). Natürlich muß die Multiplizität der Linie auch bei Berechnung der A-Werte und der Lebensdauer berücksichtigt werden. Dabei zeigt sich, daß es wesentlich darauf ankommt, wie das obere Niveau ($^3P_1$) und wie das untere ($^1S_0$) aufgespalten ist. Ohne weiteres sind die verschiedenen Meßergebnisse verständlich, wenn man annimmt, daß nur das obere Niveau aufgespalten ist, und zwar in 5 Teile, die gleiches Quantengewicht und gleiche Lebensdauer besitzen. — Näheres bei Kopfermann-Tietze.

1) Nach der Bohrschen Auffassung war ein solcher quantitativer Zusammenhang zweifelhaft, vgl. N. Bohr, Zs. f. Phys. 13, 162, 1923; J. Franck Phys. Zs. 23, 79, 1922 (Diskussionsbemerkung).

Zur Lichtabsorption in Alkalihalogenidphosphoren.

Von

W. Koch und **R. W. Pohl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1929.

Alkalihalogenidphosphore werden als große Kristalle aus dem Schmelzfluß hergestellt. Man setzt beispielsweise geschmolzenem K Cl eine winzige Menge (Größenordnung 10^{-2} Gewichtsprozent) Tl Cl zu. Der so erhaltene Phosphor besitzt zwischen dem sichtbaren und dem Schumanngebiet ein sehr charakteristisches Absorptionsspektrum. Es besteht nach der Dissertation von Hilsch [1]) im wesentlichen aus zwei scharfen Banden bei 250 und 196 mμ. Diese und entsprechende Banden anderer Halogenidphosphore sind inzwischen Gegenstand etlicher, erst zum Teil veröffentlichter Untersuchungen gewesen. Man hat z. B. die Bande bei 250 mμ auch im Absorptionsspectrum reiner Tl Cl Kristalle nachweisen können, nachdem Hilsch die Herstellung hinreichend dünner Kristallschichten geglückt war [2]). Danach konnte man versuchen, den K Cl Phosphor mit Tl Cl Zusatz als ein Mischkristall mit winziger Konzentration der einen Komponente aufzufassen. —

Weitere Untersuchungen hatten den Zweck, die absoluten, in K Cl eingebauten Mengen von Tl Cl (und entsprechend für andere Zusätze) zu ermitteln. Bei einer der versuchten Methoden ergab sich ein unerwarteter Befund: Wässrige Lösungen von Tl Cl zeigen eine scharfe Absorptionsbande im gleichen Spektralgebiet, in dem die kurzwellige Bande eines entsprechenden Phosphors gelegen ist.

Die Absorptionsspektra wurden in bekannter Weise mit lichtelektrischer Photometrie ermittelt. Die Abb. 1 zeigt das Spektrum für eine Konzentration von $3 \cdot 10^{-4}$ Mol Tl Cl/Liter. Die Absorptionskonstanten waren im Bereich 1 : 20 der benutzten Konzentration proportional. Jedoch waren sie rund 10 mal kleiner als in einem K Cl-Phosphor gleicher, durch Analyse (nicht aus der Schmelzflußzusammensetzung) ermittelten Tl Cl-Konzentration. Dieser Punkt

---

1) R. Hilsch, Zs. f. Phys. **44**, 860, 1927.

2) R. Hilsch und R. W. Pohl, Zs. f. Phys. **48**, 384, 1928.

dürfte für die Zuordnung der Banden von Wichtigkeit sein (undissoziierte Moleküle?)

In wässrigen Lösungen wird die Gestalt der optischen Absorptionsbanden oft stark durch die Anwesenheit fremder Ionen beeinflußt[1]). Zur Abschätzung derartiger Störungen haben wir Tl Cl-Lösungen mit wachsendem K Cl-Zusatz mit gleichkonzentrierten K Cl-Lösungen in Differenzmessungen verglichen. Die Verzerrung der in Abb. 1 gezeichneten Bande wurde erst merklich, wenn die molekulare Konzentration des K Cl im Wasser die des Tl Cl um das Hundertfache übertraf.

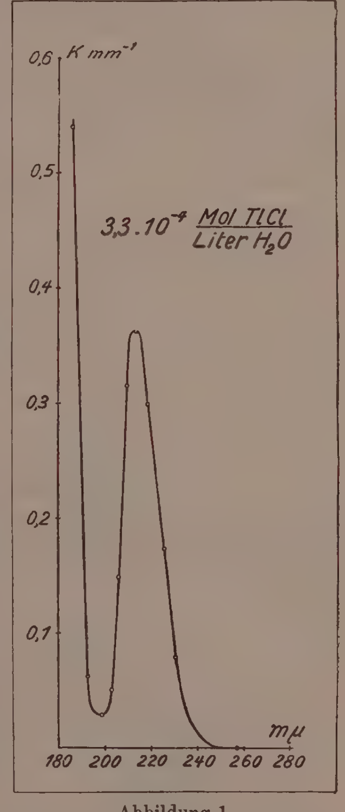


Abbildung 1.

Das Maximum des von Tl Cl in wässriger Lösung erzeugten Bande liegt bei 213 mμ. Im Tl Cl-Kristall haben Hilsch und Pohl eine Absorptionsbande bei 216 mμ beobachtet. Im K Cl-Phosphor hingegen liegt, wie eingangs erwähnt, die kurzwellige Bande bei 196 mμ. Diese Differenz erscheint zunächst erheblich. Tatsächlich ist aber im Phosphor diese Bande eine Doppelbande. Außer dem Hauptmaximum bei 196 mμ ist schon in den ersten Messungen von Hilsch deutlich ein kleines Nebenmaximum bei 208 mμ hervorgetreten. Dies Nebenmaximum ist seither durch viele Messungen von Frl. Arseñjewa bestätigt worden. Es ist aber nur bei Zimmertemperatur ein Nebenmaximum. Mit steigender Temperatur wächst die Bande bei 208 mμ dauernd, während die Bande bei 196 mμ abnimmt. Bei 545° ist nach unveröffentlichten Messungen von Frl. M. Forrò nur noch die Bande bei 208 mμ vorhanden. Die Absorptionskonstante in ihrem Maximum ist mindestens ebenso groß, wie die bei Zimmertemperatur in der jetzt verschwundenen Bande bei 196 mμ war. Gleichzeitig hat

1) Z. B. G. Scheibe, Chem. Ber. **59**, 1321, 1926.
A. Hantzsch, ebenda **59**, 1096, 1926.

Frl. Forrò für die langwellige Bande bei 250 mμ den Befund von H. Lorenz[1]) bestätigt: Diese Bande wird durch Erhitzung flacher und breiter und es kann kaum zweifelhaft sein, daß sie beim Schmelzen des Mischkristalles völlig verschwindet. Nach Frl. Forròs Ergebnissen zeigt also der Kl Cl Phosphor mit Tl Cl-Zusatz bei hoher Temperatur ein einfaches Spektrum, nämlich eine Bande bei 208 mμ. Dies Spektrum stimmt bis auf eine Wellenlängendifferenz von 5 mμ mit dem überein, das wir in den wässrigen Lösungen von Tl Cl gefunden haben. Die verbleibende Differenz darf nicht überraschen: Hat doch schon Hilsch gezeigt, daß die Bande, die man bei Zimmertemperatur im K Cl Phosphor bei 196 mμ beobachtet, im entsprechendem Rb Cl Phosphor bei 193, im entsprechendem Na Cl Phosphor bei 199 mμ liegt.

Für wässrige Lösungen von $PbCl_2$ und $PbCl_2$-haltige Phosphore haben wir ähnliche Ergebnisse erhalten. Auch haben wir die entsprechenden Versuche für die Bromide von Tl und Pb durchzuführen versucht. Sie werden in der Dissertation von W. Koch beschrieben werden. Bei den Bromiden liegt es in wässriger Lösung ebenso wie in den Phosphoren: Der von $TlBr_2$-Zusatz erzeugten Bande schließt sich unmittelbar ein jäher Anstieg in Richtung kürzerer Wellen an. Im Falle wässriger Lösungen haben Scheibe und Franck[2]) diesen Anstieg dem Elektronenaffinitätsspektrum des negativen Halogenions zugeordnet. Dieser Anstieg soll für Bromionen um die Wellenzahl 4200 cm^{-1} gegen die der Chlorionen nach längeren Wellen verschoben sein. Unsere Messungen an Bromiden von Tl und Pb stimmen damit überein.

Wir fassen kurz zusammen: Tl Cl zeigt eine Absorptionsbande

bei 216 mμ im Tl Cl Kristall

bei 208 mμ im K Cl Phosphor mit Tl Cl Zusatz

bei 213 mμ in verdünnter wässriger Lösung.

Daher möchten wir diese Banden in allen Fällen dem gleichen Träger zuordnen. — Für Bleichlorid gilt das Entsprechende mit ähnlichen Zahlen.

---

1) Dissertation von H. Lorenz, Zs. f. Phys. **46**, 558, 1927.

2) J. Frank und G. Scheibe, Zz. f. phys. Chem., Haber-Band, 22, 1928.

Erstes Physikalisches Institut der Universität Göttingen.

Über die Bedeutung der Gleitungen der Krystalle für gewisse Zustandsänderungen.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung am 22. März 1929.

Der, wie mir scheint, sehr glückliche Gedanke von Alexander und Herrmann (Zeitschr. f. Kryst. **69**, 285, 1929), in den sog. flüssigen Krystallen Aggregate von Vertretern der zwei- und eindimensionalen Krystallstrukturgruppen zu sehen, drängt offenbar dazu, die Krystalle mit Translationsvermögen als Übergangsglieder zwischen den gewöhnlichen festen Krystallen einerseits und den smektischen, bzw. nematischen Krystallen und gewöhnlichen Flüssigkeiten (Schmelzen) andererseits aufzufassen. Die mit der der gewöhnlichen Flüssigkeiten vergleichbare Beweglichkeit der flüssigen Krystalle erklärt sich aus der Leichtigkeit mit der die zwei- bzw. eindimensionalen Individuen längs ihrer Netzebene aufeinander gleiten bzw. parallel ihrer Längsrichtung sich aneinander vorbeischieben können und durch den geringen Widerstand den beide Krümmungen entgegensetzen. Da die Translation erfahrungsgemäß eine gewisse Auflockerung längs der Translationsebene bewirkt, vermutlich dadurch, daß die Translation bei Eintritt von Biegungen — eine Beanspruchung auf Biegung wird die auf Schiebung fast immer begleiten — für zwei benachbarte derartige Ebenen i. A. nicht mehr ein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung sein kann, wird dadurch Annäherung an smektische (zweidimensionale) Krystallaggregate vermittelt, sie wird um so größer sein, je dünner die einzelnen Translationspakete werden. Die von Grandjean (Compt. rend. **166**, 165, 1918) beobachteten Stufen („structure en gradins") entsprechen vielleicht den Rändern solcher sehr dünner Translationspakete. Die Höhe ihrer Stufen beträgt nach Grandjean 0.1—0.2 μ, nach Gaubert (Compt. rend. **177**, 698, 1923) scheint die Höhe zu schwanken und (was charakteristisch ist) mit

steigender Temperatur abzunehmen. Von derselben Größenordnung sind auch die Abstände der Translationsstreifen wie man sie z. B. an natürlichen verbogenen Goldblättchen nach (111) leicht beobachten kann.

Die Krystalle mit zwei oder mehr tautozonalen Scharen von Translationsebenen mit gemeinsamer Translationsrichtung *t*, bei denen, zumal bei Beanspruchung auf Torsion um *t*, ein Zerfall in Fäden nach *t* eintreten kann, vermitteln Übergänge zu Aggregaten nematischer (eindimensionaler) Krystalle; es wird hier die Parallellagerung der Fäden, wie vorher der Blättchen parallel *T*, bevorzugt sein.

Bei Krystallen endlich mit drei oder mehr nicht tautozonalen Scharen ungleichartiger oder gleichartiger Translationsebenen, erstere z. B. beim rhombischen Diamminzinkchlorid, letztere bei allen regulären Krystallen, sind auch unmittelbare (nicht mehrstufige) Übergänge in Null-dimensionale Phasen, d. h. gewöhnliche Flüssigkeiten (Schmelzen) zu erwarten, bei regulären Krystallen i. A. nur in solche. Hier ist also, was schon früher gelegentlich hervorgehoben, i. A. die gleichmäßigste, wenn auch nicht gerade die leichteste Bildsamkeit zu erwarten, wie sie für die regulären Metalle Cu, Ag, Au mit ihren schon 1899 ermittelten, 4 gleichartigen Scharen *T* gegenüber andern Metallen von alters her bekannt ist.

An die Energie-Aufnahme eines solchen, durch Translation aufgelockerten Krystalls und die dadurch ermöglichte Umkrystallisation, ferner an die bei vielen Krystallen beobachtete Zunahme der Plastizität mit steigender Temperatur braucht hier kaum erinnert zu werden, dagegen ist es vielleicht angebracht, darauf hinzuweisen, daß die ausgezeichnetsten Vertreter leicht deformierbarer Minerale sich noch in einer andern Hinsicht smektischen und nematischen Substanzen dadurch nähern, daß die Randflächen, die den letzteren naturgemäß fehlen, bei vielen von ihnen schon auffallend schlecht oder richtiger nur selten so gut, wie bei andern Krystallen entwickelt sind. Jeder Mineraloge weiß, daß es schwer hält oder unmöglich ist Krystalle mit gut meßbaren Randflächen von so leicht gleitenden Mineralien wie Graphit, Molybdänglanz, Auripigment, Brucit, Koenenit, Glimmer, Chlorit, Talk u. a. zu erhalten. Für künstliche Krystalle mit gutem Translationsvermögen bei denen man nachträgliche Deformation leichter vermeiden kann, gilt doch nach meinen Erfahrungen vielfach dasselbe. Es sind darunter manche, deren Elastizitätsgrenze sicher weit unter der des Steinsalzes liegt, sodaß auch in dieser Hinsicht Annäherung

an isotrope Flüssigkeiten vorhanden ist. Bei dem namentlich von O. Lehmann untersuchten ölsauren Kali scheint schon die Oberflächenspannung der Krystalle in ihrer Lösung auszureichen, erhebliche Deformationen hervorzurufen die zur Vereinigung zweier Individuen zu einem einzigen führen, d. h. zu einer Umkrystallisation (mißbräuchlich Rekrystallisation genannt) die unter dem Mikroskop verfolgbar ist.[1])

Nach der Auffassung von Alexander und Herrmann könnte man angesichts der Ungleichheiten des Translationsvermögens für verschiedene Ebenen und Richtungen desselben Krystalls von einem schrittweisen und zugleich vektoriell verlaufenden Schmelzvorgang sprechen. Bei den meisten Krystallen werden vermutlich die zwei- und eindimensionalen Stufen dieses Prozesses übersprungen oder kommen nicht zur Beobachtung, letzteres ist nur möglich bei jenen Stoffen, die innerhalb eines hinreichend großen Temperatur- (und Druck-)Intervalles im smektischen oder nematischen Zustande verharren können. Bei den innerhalb eines gewissen p-t-Intervalles plastischen Körpern wäre eine Annäherung an smektischen, oder nematischen oder flüssig-isotropen Zustand angedeutet.

Nach dem eben über die Translationen gesagten wird man sich fragen, ob auch hinsichtlich der zu einfachen Schiebungen fähigen Krystalle von einer Annäherung an einen neuen Zustand gesprochen werden kann. Das trifft, wie schon früher oft betont ist, in sofern zu, als bei vielen pseudo-symmetrischen Krystallen die einfachen Schiebungen den mit steigender Temperatur erfolgenden polymorphen Umwandlungen voraufgehen und derart verlaufen, daß dadurch in mancher Hinsicht eine Annäherung an eine andere, in der Tat höher symmetrische Modifikation derselben Substanz erreicht wird. Obwohl es bisher nicht gelungen ist, einwandfrei hinsichtlich aller krystallographischen Eigenschaften zu zeigen, wie ein solcher Übergang, hier aus einem dreidimensionalen Krystall in einen anderen dreidimensionalen, zustande kommen kann, wenn die Gleitniveaus bis zu molekularem Abstand sich nähern, kann es doch keinem Zweifel unterliegen, daß auch hier ein enger Zusammenhang zwischen Gleitung und Zustandsänderung besteht. —

In beiden Fällen, sowohl bei Translationen wie bei einfachen Schiebungen, wäre der Übergang in die neue Phase dadurch charakterisiert, daß die Mobilisation und schließliche Auflösung des

---

1) Andere Auffassung bei Vorländer, Chem. Krystallographie der Flüssigkeiten, 1924, p. 27.

Gitterverbandes im Gegensatz zu dem (wenigstens scheinbar) ungeordneten durch Schmelzung, krystallographisch gesetzmäßig erfolgt, indem er zunächst in Bewegungen längs bestimmten rationalen Ebenen oder Richtungen (oder beides) besteht, die event. stufenweise aufeinander folgen[1]).

Ebenso wie in den letzten Jahrzehnten hinsichtlich der polymorphen Modifikationen und der flüssigen Krystalle stellt sich übrigens auch hinsichtlich der zu Translationen und zu einfachen Schiebungen fähigen Krystalle immer mehr heraus, daß ihre Zahl viel größer ist als man früher wohl annahm. Unter den rund 4000—5000 krystallographisch untersuchten Substanzen ist bei etwa 300 Gleitvermögen nachgewiesen, wahrscheinlich aber noch bei vielen anderen vorhanden, denn bei der krystallographischen Untersuchung künstlicher Krystalle ist darauf bisher wenig geachtet.

1) Für den gegenwärtigen Zeitpunkt ist es gewiß charakteristisch, daß Kossel den Aufbau und Abbau der Krystalle bei Wachstum und Auflösung auch in drei Stufen verfolgt. Er wählt für „Faden“ das strukturell besser bezeichnende Wort „Kette“, ebenso wäre das Wort „Netz“ den Wörtern Ebene, Blättchen u. dergl. vorzuziehen.

Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen.

Von

Kurt Friedrichs, Aachen.

Vorgelegt von R. Courant in der Sitzung am 7. Dezember 1928.

Bei der numerischen Lösung von Variationsproblemen durch das Ritzsche Verfahren ist es wichtig, die Güte der Approximation des Minimalwertes abzuschätzen[1]). E. Trefftz[2]) hat ein Verfahren angegeben, — und zwar für das Dirichletsche Problem und verwandte Aufgaben — die Lösung von Variationsproblemen so zu approximieren, daß dabei der Minimalwert von unter her angenähert wird. Durch Anwendung des Ritzschen und seines Verfahrens gelingt es also, den Minimalwert von beiden Seiten einzugrenzen. Auf anderem Wege und allgemeiner als bei Trefftz wird in Folgendem dasselbe Ziel erreicht. Man kann sehr allgemein einem Minimumproblem ein Maximumproblem zuordnen, dessen Maximalwert dem Minimalwert des ursprünglichen gleich ist. Das zugrunde liegende Prinzip ist im wesentlichen eine Legendre-Transformation. Durch eine solche Transformation entsteht z. B. aus dem Variationsproblem für die Lösung der Potentialgleichung mit vorgegebenen Randwerten ein Problem für die konjugierte Potentiafunktion. Durch eine Legendre-Transformation ordnet man ferner in der Elastizitätstheorie dem Prinzip der „virtuellen Verrückungen", das nach Castigliano benannte Prinzip von der „kleinsten Formänderungsarbeit" zu, in dem nach den Spannungen variiert wird[3]).

---

1) Im allgemeinen liefern die Beweise für die Konvergenz einer Minimalfolge daraus eine Abschätzung für die Annäherung an die Lösungsfunktion selbst.

2) Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Zürich 1927, S. 131, wo auch an Hand praktisch wichtiger Fälle die numerische Brauchbarkeit nachgeprüft wird. Vgl. auch Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren. Math. Annalen, 1923, Bd. 101, wo auch die Approximation der Lösung selbst in einzelnen Punkten auf die Approximation von Minimalwerten zurückgeführt wird.

3) Dies war übrigens der Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen. Vgl. Riemann, Weber u. Frank, Die Differential- u. Integralgleichungen, II, V, § 4, 2. 3.

Um sicher zu gehen, daß das formal neu gebildete Variationsproblem auch wirklich ein Maximum liefert, müssen gewisse starke Definitätsbedingungen gestellt werden, die sich übrigens weitgehend durch Modifikation des Variationsausdruckes erfüllen lassen.

Von Wichtigkeit für die numerische Behandlung könnte auch die folgende Tatsache sein: Sind bei dem einen Problem die Randwerte der Funktion vorgeschrieben, so ist das bei dem zugeordneten Problem nicht der Fall; dort stellen sich die Randbedingungen als „natürliche“ ein. Der erste Fall hat den Nachteil, daß man bei der Auswahl der Approximationsfunktionen behindert ist; im zweiten Falle ist die Konvergenz erfahrungsgemäß sehr langsam. Man hat aber nun die Möglichkeit im Einzelfalle zu wählen, welchen Nachteil man mit in Kauf nehmen will.

I. Variationsprobleme in einer Variablen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Variationsproblem, das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} F(u', u, x)\, dx \tag{1}$$

zum Minimum zu machen.

Wir verlangen von der gesuchten Funktion $u(x)$, daß sie vorgegebene Randwerte annimmt. Übrigens läßt sich das Folgende ganz ebenso durchführen, wenn Randbedingungen von anderem Typus vorliegen, so daß wir das nicht besonders bemerken.

Daß die Funktion $u'(x)$ die Ableitung von $u(x)$[1]) ist, formulieren wir als eine besondere Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = u'. \tag{2}$$

Die Randbedingungen lauten:

(3) $u(x_0) = \bar{u}_0$, $u(x_1) = \bar{u}_1$ oder einfach $u = \bar{u}$ für $x = x_0$, $x = x_1$;

dabei sind $\bar{u}_0, \bar{u}_1$ beliebige vorgegebene Werte.

Ferner sei

$$F_{u'u'} > 0, \tag{4}$$

$$\Delta = F_{u'u'} \cdot F_{uu} - F_{uu'}^2 > 0. \tag{5}$$

1) $u(x)$ und $u'(x)$ sollen zwischen oberen und unteren Schranken liegen, die für jedes x in $x_0 \leq x \leq x_1$ gegeben seien. $u(x)$ und $u'(x)$ sind also auf einen abgeschlossenen Bereich B beschränkt. In B sei F nach seinen Argumenten zweimal stetig differenzierbar. Auch (4) und (5) sollen in B gelten.

Wir nehmen an, daß das Minimum für eine zweimal stetig differenzierbare ganz innerhalb B liegende Funktion $u(x)$ angenommen wird. Für sie gilt die Eulersche Gleichung

(6) $$\frac{d}{dx} F_{u'} = F_u.$$

Nun führen wir neue Funktionen $p(x)$, $p'(x)$ ein durch die Gleichungen

(7) $$F_{u'} = p, \quad F_u = p',$$

woraus wir wegen (5) u und u' als Funktionen von p und p' berechnen können. Mit ihnen bilden wir einen neuen Integranden:

(8) $$\Phi(p', p, x) = pu' + p'u - F(u', u, x);$$

es gilt dann

(9) $$\Phi_{p'} = u, \quad \Phi_p = u'.$$

Als neues Variationsproblem stellen wir nun

(10) $$\int_{x_0}^{x_1} \Phi \, dx - p\bar{u} \Big|_{x_0}^{x_1} = \text{Min.}^{1)},$$

wo zur Konkurrenz zugelassen sind alle stetigen Funktionen $p(x)$ und $p'(x)$[2], ohne Randbedingungen, nur unterworfen der Bedingungsgleichung

(11) $$\frac{dp}{dx} = p'.$$

Wir behaupten, daß gerade die der Lösung $u(x)$ und $u'(x)$ von (1) vermöge (7) zugeordneten Funktionen $p(x)$, $p'(x)$ den Ausdruck (10) zum Minimum machen. Zunächst ist wegen (6) die Gl. (11) erfüllt. Die neue Eulersche Gleichung

(12) $$\frac{d}{dx} \Phi_{p'} = \Phi_p$$

ist wegen (9) nichts anderes als die Bedingungsgleichung (2) und also erfüllt. Die natürliche Randbedingung

(13) $$\Phi_{p'} - \bar{u} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_0, \quad x = x_1$$

ist nichts anderes als die Randbedingung (3). Also ist der Ausdruck (10) zunächst stationär. Daß er auch ein Minimum ist, folgt

---

1) Anstatt das Negativum von (10) zum Maximum zu machen.

2) Sie sollen ganz in einem Bereich B^* von derselben Art wie B liegen. B^* soll enthalten sein in dem Bereich der durch Transformation aus B entsteht. p' sei in B^* einmal stetig differenzierbar.

aus der Positivität der zweiten Variation von (10) für alle $p(x)$, $p'(x)$ im Bereich $B^*(x)$. Man errechnet nach (9), (7) unter Beachtung von (4), (5)

$$\Phi_{p'p'} = \frac{1}{\Delta} F_{u'u'} > 0, \tag{14}$$

$$\Phi_{p'p'} \cdot \Phi_{pp} - \Phi^2_{pp'} = \frac{1}{\Delta} > 0. \tag{15}$$

Der Minimalwert des neuen Problemes (10)

$$\int_{x_0}^{x_1} (pu' + p'u - F)\, dx - p\bar{u}\Big|_{x_0}^{x_1} = -\int_{x_0}^{x_1} F dx$$

ist überdies gerade dem Minimalwert von (1) entgegengesetzt gleich.

II. Zusätze.

1. Ist die starke Definitheitsbedingung (5) nicht erfüllt, sind aber die größten Werte von $-F_{uu}$ und $|F_{uu'}|$ genügend klein im Verhältnis zum kleinsten Wert von $F_{u'u'}$, so können wir die Bedingung (5) z. B. dadurch befriedigen, daß wir zum Integral (1) noch ein Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} G(u, x)\, dx$$

addieren[1]; indem wir G geeignet — etwa $G \equiv (\alpha x + \beta) . u^2$ — wählen.

2. Ohne daß die Existenz der Lösung von (1) bekannt ist, läßt sich zeigen, daß die Summe der unteren Grenzen von (1) und (10) nicht negativ ist. Es ist nämlich[2]) für beliebige zulässige aber voneinander unabhängige Funktionen $u(x)$, $p(x)$ mit $u' = \frac{du}{dx}$, $p' = \frac{dp}{dx}$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(u) + \Phi(p)]\, dx - pu\Big|_{x_0}^{x_1}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F(u) - F(v) + v F_u(v) + v' F_{u'}(v) - u F_u(v) - u' F_{u'}(v)]\, dx,$$

wobei wir $v = \Phi_{p'}$, $v' = \Phi_p$, also $p = F_{u'}(v)$, $p' = F_u(v)$ gesetzt haben. Der Integrand ist nichts anderes als der Rest zweiter

1) Das entspricht der LEGENDREschen Umformung der zweiten Variation.
2) Wir schreiben $F(u)$, $\Phi(p)$ anstatt $F(u', u, x)$, $\Phi(p', p, x)$ usw.

Ordnung der Entwicklung von $F(u)$ nach u', u in der Umgebung von v', v und also wegen der Bedingungen (4), (5) nicht negativ und übrigens nur gleich Null für $u = v$, $u' = v'$, d. h. für die Lösung.

3. Wir betrachten ferner den ausgearteten Fall, daß $F_{uu} = F_{uu'} = 0$ ist, wo wir also

$$F = G(u', x) + k(x) . u \tag{16}$$

setzen können. Hier fordern wir nur (4) $G_{u'u'} > 0$. Die Legendre-Transformation lautet jetzt einfach

$$F_{u'} = p, \tag{17}$$
$$\Phi(p, x) = pu' - G, \quad \Phi_p = u',$$

wo wir also u' allein durch p ausdrücken können und umgekehrt. Die aus der Lösung $u(x)$ von (1) so entstehende Funktion $p(x)$ macht den Ausdruck (10) zum Minimum unter allen Funktionen $p(x)$, die noch der Nebenbedingung

$$\frac{dp}{dx} = k \tag{18}$$

genügen. (Im Ausdruck (10) tritt jetzt p' nicht auf). In der Tat erlaubt (18) nur Variationen von der Form $p +$ const. und es ist die erste Variation von (10) $\int_{x_0}^{x_1} \Phi_p \, dx - \bar{u} \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$ wegen $\Phi_p = u'$, während die zweite Variation (4) positiv ist.

4. Unterscheiden wir bei einem Variationsproblem Bedingungsgleichungen: u' ist Ableitung von u, u nimmt gegebene Randwerte an —, und Variationsgleichungen: Eulersche Gleichung, natürliche Randbedingungen —, so ergibt sich aus dem vorangehenden: die Bedingungsgleichungen des ursprünglichen Problems sind die Variationsgleichungen des transformierten und umgekehrt.

5. Methode der Lagrange-Faktoren. Die bisher dargestellte Transformation der Variationsprobleme läßt sich noch allgemeiner entwickeln, wenn man von der Methode der Lagrange-Faktoren ausgeht. Man ersetzt zunächst das Minimum-Problem (1) mit den Bedingungen (2), (3) durch ein bedingungsloses Variationsproblem: Der Ausdruck

$$I \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[F + p(x)\left(\frac{du}{dx} - u'\right)\right] dx - q(u - \bar{u}) \Big|_{x_0}^{x_1} \tag{19}$$

soll stationär werden. Hierbei sind die von einander unabhängigen Funktionen $u(x)$, $u'(x)$, $p(x)$ und die Werte q_0, q_1 zu variieren. Die erste Variation von I lautet:

$$(20)\quad \delta I = \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_u - \frac{dp}{dx}\right)\delta u + (F_{u'} - p)\,\delta u' + \left(\frac{du}{dx} - u'\right)\delta p\right] dx$$
$$\left[(q-p)\,\delta u + (u - \bar{u})\,\delta q\right]_{x_0}^{x_1}.$$

Es ergeben sich durch Variation nach p und q: die Gleichungen:

$$(2)\quad \frac{du}{dx} - u' = 0, \qquad (3)\quad u - \bar{u} = 0 \quad \text{für } x = x_0,\; x = x_1$$

und durch Variation nach u und u':

$$(21)\qquad F_u - \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$(22)\qquad F_{u'} - p = 0,$$

$$(23)\qquad q - p = 0.$$

Das Ausgangsproblem entsteht, wenn man (2) und (3) von vornherein als Bedingungen stellt. Dann sind (21), (22) und (23) Variationsgleichungen. Stellt man dagegen diese letzten drei Gleichungen als Bedingungen, so ergeben sich (2) und (3) als Variationsgleichungen. Das ist das transformierte Maximum-Problem. Man hat dabei übrigens zu benutzen, daß durch die Bedingungen (21), (22) die freie Variabilität von $p(x)$ nicht eingeschränkt wird; das ist auch sicher nicht der Fall, sobald u und u' vermöge (21), (22) durch p und $\frac{dp}{dx}$ wie früher angenommen berechenbar sind.

Durch Einsetzen von (21), (22), (23) in (19) erhält man nach partieller Integration den Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x_1} [F - u F_u - u' F_{u'}]\, dx + F_{u'} \cdot \bar{u}\Big|_{x_0}^{x_1},$$

der in das Negativum von (10) übergeht, sobald man $p(x)$ als einzige neue Funktion einführt.

Beiläufig sei erwähnt, daß das Variationsproblem der „kanonischen“ Gleichungen (2), (21) aus dem Problem (19) einfach dadurch entsteht, daß man nur die Gleichung (22) als Bedingung stellt (und etwa die Randbedingungen (3)).

Die Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren zum Ausgang zu wählen, hat den Vorzug, daß man ohne weiteres übersieht, wie man vorzugehen hat, wenn noch weitere Bedingungsgleichungen beliebiger Art vorliegen.

Anm. bei der Korrektur. Wie Herr COURANT mitteilte, läßt sich der Übergang vom Minimum- zum Maximumproblem rein begrifflich begründen. Das soll an anderer Stelle ausgeführt werden.

III. Variationsprobleme für zwei Variable in Beispielen.

1. Wir betrachten zunächst das Problem

$$(24)\quad \tfrac{1}{2}\iint\limits_G (u_x^2+u_y^2+a u^2)\,dx\,dy = \text{Min.}\quad u=\bar u \text{ auf } \Gamma,\quad a>0.$$

wo G ein Gebiet der (x, y)-Ebene mit dem Rand Γ ist[1]). Es sei $u(x, y)$ die Lösung dieses Problems[2]).

Wir führen neue Funktionen p, q, d ein vermöge der Gleichungen

$$(25)\qquad p=u_x,\quad q=u_y,\quad d=au$$

und betrachten als neuen Integranden

$$p u_x + q u_y + du - \frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2+a u^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}d^2+p^2+q^2\right).$$

Wir stellen demgemäß das neue Variationsproblem

$$(26)\quad \frac{1}{2}\iint\limits_G\left(\frac{1}{a}d^2+p^2+q^2\right)dx\,dy-\int\limits_\Gamma (p x_n+q y_n)\,\bar u\,ds = \text{Min.}$$

(x_n, y_n Komponenten der äußeren Normalen s Bogenlänge auf Γ), wobei wir der Eulerschen Gleichung von (19) entsprechend die Gleichung

$$(27)\qquad d = p_x+q_y$$

als einzige Nebenbedingung stellen. Die Eulerschen Gleichungen von (26) lauten

$$(28)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{a}(p_x+q_y)_x-p &= 0\\ \frac{1}{a}(p_x+q_y)_y-q &= 0, \end{aligned}$$

die natürliche Randbedingung

$$(29)\qquad \frac{1}{a}(p_x+q_y)-\bar u = 0 \quad\text{auf } \Gamma.$$

Diese Gleichungen besagen, daß die Funktion

$$u = \frac{1}{a}(p_x+q_y)$$

folgendes erfüllt:

$$u_x=p,\quad u_y=q,\quad \Delta u-au=0,\quad u=\bar u \text{ auf } \Gamma.$$

---

1) Etwa mit stückweise stetig differenzierbar sich ändernder Tangente.

2) Sie besitzt sicher stetige erste und zweite Ableitungen im Innern von G.

Der Wert des Minimums von (26) ist wieder gleich dem negativen Minimalwert von (24).

2. Das Dirichletsche Problem

(30) $$\frac{1}{2}\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy = \text{Min.} \quad u = \bar{u} \text{ auf } \Gamma$$

entspricht dem ausgearteten Fall II. 3. Man erhält durch Einführung von $u_x = p$, $u_y = q$, $\Phi(p,q) = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$ das Variationsproblem

(31) $$\frac{1}{2}\iint_G (p^2+q^2)\,dx\,dy - \int_\Gamma (px_n+qy_n)\,\bar{u}\,ds = \text{Min.}$$

unter der Nebenbedingung $p_x+q_y = 0$. Wir befriedigen diese Nebenbedingung durch den Ansatz $p = v_y$, $q = -v_x$ und erhalten nach partieller Integration auf Γ somit das Problem

(32) $$\frac{1}{2}\iint_G (v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy + \int_\Gamma v\,\bar{u}_s\,ds = \text{Min.}$$

dessen Lösung v die zu u konjugierte Potentialfunktion ist. Die Gleichung $\Delta v = 0$ und die natürliche Randbedingung $v_n = -u_s$ stellt sich von selbst ein.

Ohne die Existenz der Lösung von (30) zu kennen, können wir einsehen, daß die Summen der unteren Grenzen von (30) und (32) nicht negativ ist. Das lehrt die folgende identische Umformung (vgl. II. 2)

$$\iint_G (u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy + 2\int_\Gamma v\,u_s\,ds$$
$$= \iint_G [(u_x-v_y)^2+(u_y+v_x)^2]\,dx\,dy.$$

Bei dem „freien“ Problem (31) können wir von den Funktionen p und q schon das Erfülltsein der zugehörigen Eulerschen Gleichung $p_y-q_x = 0$ verlangen. Wir können dann durch $u_x = p$, $u_y = q$ eine Funktion u einführen und erhalten so das Problem

(33) $$\frac{1}{2}\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy - \int_\Gamma u_n\,\bar{u}\,ds = \text{Min.}$$

für alle Funktionen der Nebenbedingung $\Delta u = 0$. Das ist nichts anderes als das Verfahren, welches Trefftz angegeben hat. Für numerische Zwecke bleibt es vielleicht zweckmäßig diese Zusatzforderung beizubehalten; sobald es aber möglich ist, ohne Schwierigkeit Approximationsfunktionen anzugeben, die von vornherein den natürlichen Randbedingungen genügen und nicht der Eulerschen Gleichung, wird man eine bessere Konvergenz erwarten dürfen, wenn man diese dem Ritzschen Verfahren zugrunde legt.

Über die Entstehung der Turbulenz.

1. Mitteilung.

Von

W. Tollmien, Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.)

Vorgelegt von L. Prandtl in der Sitzung vom 22. März 1929.

Bekanntlich sind bei geometrisch ähnlichen Begrenzungen die Strömungsformen von Flüssigkeiten und Gasen, soweit man vom Einfluß der Kompressibilität absehen kann, allein durch die Reynoldssche Zahl bestimmt, jene Dimensionslose, die sich aus einer charakteristischen Geschwindigkeit und Länge und der kinematischen Zähigkeit zusammensetzt. Die auffallendste und wichtigste Änderung der Strömungsformen mit der Reynoldsschen Zahl ist nun durch den schroffen Übergang vom laminaren in den turbulenten Strömungszustand gegeben. Aus zahlreichen Beobachtungen kennt man in vielen Fällen, z. B. bei der Strömung durch Rohre oder um eine Kugel die Reynoldssche Zahl dieses Überganges. Doch ist die summarische Angabe dieser „kritischen" Reynoldsschen Zahl physikalisch unvollständig, da diese stark von den Störungen der ursprünglichen Laminarströmung abhängt. Von den Störungen besitzt man nun allenfalls die Angabe ihrer Erregungsstelle, z. B. bei der Rohrströmung, ob die Störungen vom Einlauf oder weiter stromab von den Wänden ausgehen, wo sie anscheinend weniger wirksam als im ersten Falle sind. Darüber hinaus sind die Störungen aber bisher experimentell nicht definiert und klassifiziert worden. Die Experimente geben deshalb nicht einmal Gewißheit darüber, in welchem Sinne man genau genommen von einer kritischen Reynoldsschen Zahl als einer oberen Grenze für das Bestehen der Laminarströmung sprechen kann, ob diese nicht vielleicht sich bis zu beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen aufrecht erhalten läßt, wenn man nur die Größe der Störungen immer weiter herabsetzt.

Einen detaillierten Einblick in die Entstehung der Turbulenz konnte man wohl von einer photographischen Verfolgung des Strömungsumschlages erhoffen. Mehrfach wurde dabei eine Methode nach Reynolds angewandt, der die Strömung in Glasrohren mit Hilfe eines Farbfadens in der Rohrmitte beobachtete. L. Prandtl[1]) suchte den Vorgang bei der ebenen Strömung in einem Gerinne durch Photographie der mit Aluminiumpulver bestreuten freien Oberfläche näher zu erfassen. Wohl gelang es mit diesen Mitteln, die Stelle des Strömungsumschlages räumlich einigermaßen festzulegen, z. B. für die Rohrströmung meist im sogenannten Anlaufgebiet, ähnlich, wie diese Feststellung in diesem und anderen Fällen auch aus Druck- und Geschwindigkeitsmessungen gelang. Im übrigen konnte man von den komplizierten Bildern nur eine Beschreibung in groben Zügen geben; der Mechanismus der Entstehung der Turbulenz konnte experimentell bisher nicht weiter klargestellt werden.

Jedenfalls setzt nach der üblichen Anschauung die Entstehung der Turbulenz mit dem Instabilwerden der Laminarströmung ein. Die einfachsten Annahmen zur theoretischen Erfassung dieses Vorganges gewinnt man, indem man eine ebene laminare Geschwindigkeitsverteilung voraussetzt, die zudem nur von der Koordinate quer zur Geschwindigkeitsrichtung abhängen möge, und dann dieses Geschwindigkeitsprofil ebenfalls zweidimensionalen Störungen unterwirft. Das erste Profil, das in dieser Art mit der Methode der kleinen Schwingungen behandelt wurde, war das der „Couette-Strömung“ mit linearer Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Querkoordinate. Das Resultat, das Hopf[2]) und v. Mises[3]) erhielten, gab keinen Hinweis zur Entstehung der Turbulenz; denn es ergab sich ein Abklingen sämtlicher Störungen, also ständige Stabilität der vorausgesetzten laminaren Strömung. Anfachung von Störungen erhielten erst Prandtl[1]) und Tietjens[4]) bei gewissen Profilen. Doch erhielten diese Autoren das physikalisch befremdende Resultat, daß in dem Bereich von Reynoldsschen Zahlen, für den die benutzten Näherungen gültig waren, es stets auch angefachte Schwingungen gab, während man zu erwarten hatte, daß unterhalb einer gewissen Reynoldsschen Zahl die Laminarströmung gegenüber allen Störungen stabil ist. Nun waren in den Prandtl-Tietjens-

---

1) L. Prandtl: Zs. f. angew. Math. u. Mech. **1**, S. 431, 1921 bzw. Phys. Zs. **23**, S. 19, 1922.

2) L. Hopf; Ann. d. Phys. **44**, S. 1, 1914.

3) R. v. Mises: Beitrag zum Oscillationsproblem. Heinrich Weber-Festschrift 1912, S. 252.

4) O. Tietjens: Zs. f. angew. Math. u. Mech. **5**, S. 200, 1925.

schen Untersuchungen der mathematischen Einfachheit halber nach einem Vorschlag RAYLEIGHS für die Grundströmung Profile vorausgesetzt, die sich aus Geradenstücken zusammensetzen. Das durchgängige Verschwinden der Krümmung des Profiles der Grundströmung bedeutet aber in diesem Falle eine so wesentliche physikalische Voraussetzung, daß man bei Berücksichtigung der Krümmung eine Modifikation des PRANDTL-TIETJENSschen Ergebnisses gerade in dem physikalisch noch unbefriedigenden Punkte erwarten konnte. Im folgenden sind also Profile mit nicht überall verschwindender Krümmung behandelt worden.

Diese einleitende Darlegung soll natürlich nicht im entferntesten einen Überblick über die ausgedehnte Literatur [1]) zur Entstehung der Turbulenz bieten; angegeben ist nur der Zusammenhang, in den wir die folgende Arbeit eingeordnet wissen wollen.

Meinem hochverehrten Chef, Herrn Prof. Dr. L. PRANDTL, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Untersuchung und für sein ermutigendes und förderndes Interesse an meiner Arbeit.

§ 1. Die allgemeine Störungsgleichung.

Die Hauptströmung sei $U(y)$, wobei y die Koordinate senkrecht zu der in die x-Achse fallenden Strömungsrichtung ist. Die Störungen denkt man sich nach FOURIER zerlegt, sodaß die Stromfunktion eines bestimmten FOURIERgliedes $\varphi(y)\,e^{i(\alpha x - \beta t)} = \varphi(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}$ sei. α ist die räumliche, der Realteil von β die zeitliche Kreisfrequenz, der reelle Teil von c die Phasengeschwindigkeit der betreffenden Störung; der imaginäre Teil von β gibt die Anfachung oder Dämpfung der Störung an, je nachdem er positiv oder negativ ist. Nach der Methode der kleinen Schwingungen berücksichtigt man stets nur die in $\varphi(y)$ linearen Glieder. Man erhält dann durch Einsetzen in die NAVIER-STOKESschen Differentialgleichungen der reibenden Flüssigkeiten, Elimination des Druckes und durchgängige Einführung dimensionsloser Größen die Störungsgleichung

$$(1)\qquad (U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha R}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi)$$

mit R als Reynoldsscher Zahl. Die Bezugslänge, mit der eine charakteristische Geschwindigkeit des Profiles, z. B. die maximale

1) Vgl. dazu die zusammenfassenden Berichte für die theoretische Literatur von F. NOETHER: Zs. f. angew. Math. u. Mech. 1, S. 125, 1921 und für die experimentelle von L. SCHILLER: Phys. Zs. 26, S. 566, 1925.

U_m multipliziert nach Division durch die kinematische Zähigkeit νR ergibt, ist als eine Abmessung des Profiles so gewählt, daß die Ableitungen der dimensionslosen U in (1) von der Größenordnung 1 sind. Als Randbedingung hat man an den begrenzenden Wänden, d. h. den Grenzen des Definitionsbereiches von $U(y)$, das Verschwinden beider Störungskomponenten, also von φ und φ'.

Zunächst werden wir im folgenden β bzw. c rein reell annehmen, wir suchen also die Durchgangspunkte von Stabilität zu Labilität. Für dies Problem lassen sich nun leicht zwei Aussagen über c und α machen. Schreibt man die Störungsgleichung symbolisch $L(\varphi) = 0$ und integriert die Ausdrücke $\varphi\, L(\varphi) - \varphi\, \overline{L(\varphi)}$ bzw. $\varphi\, L(\varphi) + \varphi\, \overline{L(\varphi)}$ (konjugiert komplexe Größen sind überstrichen) zwischen den Rändern unter Berücksichtigung der Randbedingungen, so erhält man in einfacher und bekannter Weise [1]) einmal für $U'' \leqq 0$ $c < U_{\max.}$, ferner $\alpha \ll R$. Gerade der Umstand, daß man demnach eine Nullstelle von $U - c$ annehmen muß, bedingt besondere mathematische Erörterungen und führt ein auch physikalisch interessantes Verhalten der Störungen mit sich.

§ 2. Die „reibungslosen" Lösungen der Störungsgleichung.

Allgemein nimmt man im folgenden αR sehr groß an.

Dann liegt der Versuch nahe, Lösungen der Störungsgleichung angenähert in der Weise darzustellen, daß man die mit dem sehr kleinen Faktor $\frac{1}{\alpha R}$ multiplizierten Glieder der Störungsgleichung wegläßt, also Lösungen der reibungslosen Störungsgleichung.

$$(2) \qquad (U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = 0$$

aufsucht. Wir wollen die Lösungen dieser reibungslosen Störungsgleichung betrachten, ohne zunächst weiter auf ihren Zusammenhang mit den Lösungen der allgemeinen Störungsgleichung (bei großen αR) einzugehen.

An der Stelle $U = c$ (vgl. dazu den Schluß von § 1) hat die Differentialgleichung (2) einen singulären Punkt. Da $\frac{U''}{U - c}$ an dieser Stelle einen Pol 1. Ordnung hat, falls nicht gerade auch U'' hier verschwindet, so liegt eine außerwesentliche Singularität (Stelle der Bestimmtheit) vor, und wir können nach allgemeinen

---

1) Vgl. etwa Solberg: Zum Turbulenzproblem, Proc. of the first Intern. Congress f. Applied Mechanics, Delft 1924, S. 387, oder Noether: Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem. Zs. f. angew. Math. u. Mech. 6, S. 232. 1926.

Sätzen über lineare Differentialgleichungen leicht die konvergenten Reihenentwicklungen der Integrale von der Stelle $U-c=0$ aus aufstellen. In diesem Punkte sei $y=0$ gesetzt und y sei positiv für $U-c>0$; demnach bezeichne der Zeiger 0 Werte an dieser Stelle. Dann sind zwei linear unabhängige Lösungen von (2), wenn mit $\mathfrak{P}_1(y)$ bzw. $\mathfrak{P}_2(y)$ Potenzreihen in y, mit A eine durch die Differentialgleichung bestimmte Konstante bezeichnet werden:

$$\varphi_1 = y\,\mathfrak{P}_1(y) = y+\cdots$$
$$\varphi_2 = \mathfrak{P}_2(y)+A\,\varphi_1\log y = 1+\cdots+\frac{U_0''}{U_0'}\,y\log y+\cdots$$

Dabei soll ein für alle Mal festgesetzt werden, daß für positive y $\log y$ rein reell ist.

Bevor wir aus der analytischen Beschaffenheit von φ_1 und φ_2 Folgerungen ziehen, seien diese für einen speziellen Fall von U und zwar für parabolische Geschwindigkeitsverteilung angegeben. Demnach sei $U-c = y(2a-y)$, sodaß für $y=a$ $U'=0$ wird; setzt man noch $a=\sqrt{1-c}$, so wird hier $U=1$ und für $y=a-1$ $U=0$. Zweckmäßig führen wir $y_1=\frac{y}{a}$, $\alpha_1=a\alpha$ ein, sodaß im Parabelscheitel also $y_1=1$ ist, und erhalten dann als Differentialgleichung in der neuen Variablen

$$y_1(2-y_1)(\varphi''-\alpha_1^2\varphi)+2\varphi = 0.$$

Man erhält die Reihenentwicklungen:

$$\frac{\varphi_1}{a} = y_1+a_2y_1^2+a_3y_1^3+\cdots,$$

wobei

$$a_n = \frac{n(n-3)\,a_{n-1}+2\alpha_1^2\,a_{n-2}-\alpha_1^2\,a_{n-3}}{2n(n-1)},$$

$$a_1 = 1,\quad a_2 = -\frac{1}{2},\quad a_3 = \frac{\alpha_1^2}{6},\quad a_4 = -\frac{\alpha_1^2}{18}\cdots$$

ist.

$$\varphi_2 = 1+b_1y_1+b_2y_1^2+b_3y_1^3+\cdots-\frac{\varphi_1}{a}\log y_1,$$

wobei

$$b_n = \frac{n(n-3)\,b_{n-1}+2\alpha_1^2\,b_{n-2}-\alpha_1^2\,b_{n-3}+2(2n-1)\,a_n-(2n-3)\,a_{n-1}}{2n(n-1)},$$

$$b_0 = 1,\quad b_1 = 0,\quad b_2 = -1+\frac{\alpha_1^2}{2},\quad b_3 = \frac{1}{8}+\frac{\alpha_1^2}{18}\cdots$$

ist.

Für $\alpha_1 = 0$ ist

$$\varphi_1 = \frac{U-c}{2a},$$

$$\varphi_2 = -2a(U-c)\int^y \frac{dy}{(U-c)^2},$$

das sind Ausdrücke, die auch für beliebige U bei $\alpha = 0$ die Lösungen darstellen.

Bei der allgemeinen Betrachtung von φ_1 und φ_2 stellen wir zunächst fest, daß φ_1 auch im singulären Punkt regulär bleibt, während φ_2 dort eine logarithmisch unendliche Ableitung hat. Bleiben wir, wenigstens soweit φ_2 in Frage kommt, in einiger Entfernung vom singulären Punkt $U = c$, so genügen φ_1 und φ_2 dort in der Tat angenähert der vollständigen Störungsgleichung (1) bei sehr großem αR und zwar umso besser, je größer αR ist[1]. Der Fehler in φ_1 und φ_2 ist klein von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1}$. In unmittelbarer Nachbarschaft des kritischen Punktes ist dieser Schluß wegen des Unendlichwerdens der Ableitungen von φ_2 offenbar nicht mehr berechtigt. Wir müssen daher die allgemeine Störungsgleichung (1) in der Nähe von $U = c$ diskutieren. Physikalisch ist diese Stelle dadurch charakterisiert, daß ein Flüssigkeitsteilchen wegen der Gleichheit von Hauptgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit sich stets in demselben Druckfelde befindet, wenn man von der kleinen Querbewegung der Störung absieht.

§ 3. Die Lösungen der Störungsgleichung in der Nachbarschaft von $U = c$.

Zur Untersuchung der Lösungen in der Nähe des kritischen Punktes $U = c$ nehmen wir einen kleinen Bereich um die kritische Stelle, den „Übergangsstreifen", worin wir $U-c$ mit genügender Genauigkeit durch $U_0' y$ und zunächst auch U'' durch U_0'' ersetzen können. Wir führen nun noch $y = (\alpha R U_0')^{-\frac{1}{3}}\eta = \varepsilon\eta$ ein, wobei η wegen der Kleinheit von ε auch bei kleinem y sehr großer Werte fähig ist. Dann erhalten wir aus (1) die Differentialgleichung in η:

$$(3) \qquad i\varphi'''' + \varphi''(\eta - \varepsilon^2 2\alpha^2 i) - \varphi\left(\varepsilon\frac{U_0''}{U_0'} + \varepsilon^2\eta\alpha^2 - \varepsilon^4\alpha^4 i\right) = 0,$$

---

1) Auf einem mehr formalen Wege würde man eben zu den reibungslosen Lösungen kommen, wenn man nach denjenigen Integralen der allgemeinen Störungsgleichung fragt, die mit ihren Ableitungen bei beliebig wachsendem αR, abgesehen von der kritischen Stelle $U = c$, endlich bleiben.

sodaß wir Lösungen der Störungsgleichung für große αR d. h. kleine ε in der Umgebung von $U = c$ aus der Differentialgleichung

$$(4) \qquad -i\varphi'''' = \eta\varphi'' - \varepsilon \frac{U_0''}{U_0'} \varphi$$

in erster Näherung gewinnen, da in der benutzten Differentialgleichung (3) $U = c$ d. h. $\eta = 0$ kein singulärer Punkt ist und angenäherte Werte der Koeffizienten der Differentialgleichung demnach auch angenäherte Lösungen bedingen.

Für φ_1 liefert die Differentialgleichung (4) erwartungsgemäß keine Korrektur, dagegen für φ_2 sehr wohl eine, die wir in folgender Weise gewinnen.

Im kritischen Punkt y bzw. $\eta = 0$ war ja $\varphi_2 = 1$ gesetzt. Diesen Wert setzen wir als Näherung φ_{20} in das Glied $\varepsilon \frac{U_0''}{U_0'} \varphi$ ein und berechnen aus der Differentialgleichung (4) eine Korrektur, die wir passend mit $\varepsilon\varphi_{21}$ bezeichnen. Die Differentialgleichung für φ_{21} ist dann

$$(5) \qquad -i\varphi_{21}'''' = \eta\varphi_{21}'' - \frac{U_0''}{U_0'}.$$

Da wir nach dem Vorhergehenden annehmen dürfen, daß in einiger Entfernung vom kritischen Punkt die reibungslose Lösung gültig ist, so werden wir eine Lösung von (5) anstreben, die sich nach außen hin der entsprechenden reibungslosen Lösung anschließt. In der Nachbarschaft des kritischen Punktes (d. h. bei kleinem $|y|$) ist aber reibungslos gerechnet $\varphi_{21}'' = \frac{U_0''}{U_0'} \frac{1}{\eta}$; an diesen Wert soll sich also die Lösung von (5) nach außen hin d. h. für große $|\eta|$ anschließen. Es wird uns in der Tat gelingen, eine derartige Lösung herzustellen.

Bezeichnen wir abkürzend mit $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ bzw. $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$ die Hankelschen Funktionen 1. bzw. 2. Art mit dem Index $\frac{1}{3}$ und dem Argument $\frac{2}{3}(i\eta)^{\frac{3}{2}}$: $H_{\frac{1}{3}}^{(1),(2)}\left[\frac{2}{3}(i\eta)^{\frac{3}{2}}\right]$, so sind die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (5)

$$(6) \qquad \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \text{ und } \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5)

$$(7) \qquad \frac{U_0''}{U_0'} \frac{\pi}{6} \eta^{\frac{1}{2}} \left\{ H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \int^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} d\eta - H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \int^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} d\eta \right\}.$$

Der bequemen Darstellung der Hankelschen Funktionen wegen betrachten wir diese Lösung in der unteren η-Halbebene, was

wegen der Regularität der Lösung erlaubt ist, sodaß $0 \geqq \arg \eta \geqq -\pi$ ist. Ferner sei $\frac{3\pi}{4} \geqq \arg[(i\eta)^{\frac{3}{2}}] \geqq -\frac{3\pi}{4}$. Für den Anschluß an die reibungslose Lösung brauchen wir das Verhalten von (7) für große $|\eta|$. In den Anschlußpunkten sei $\eta = \pm r$, auf dem Kreis mit diesem Radius $\eta = re^{i\vartheta}$. Die untere Grenze der beiden Integrale von (7) wird in einen Punkt dieses Halbkreises in der unteren Halbebene gelegt. Wir ersetzen die Hankelschen Funktionen durch ihre asymptotischen Formeln für große Werte des Argumentes:

$$H^{(1),(2)}_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (i\eta)^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{\pm i \left[\frac{2}{3}(i\eta)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{12}\pi\right]\right\}$$

Dabei ist $-\frac{3\pi}{8} \leqq \arg[(i\eta)^{-\frac{3}{4}}] \leqq \frac{3\pi}{8}$. Das Zeichen exp $(\ldots)$ bedeutet die Exponentialfunktion des Klammerausdruckes. Für das Folgende benötigen wir (7) auf dem Halbkreise in der unteren η-Halbebene mit r. Das erste Integral in (7) erhält dort in erster asymtotischer Näherung den Wert:

$$-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{5i\pi}{8}} r^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3i\vartheta}{4}} \exp\left\{+i\left(\frac{2}{3} e^{\frac{3i\pi}{4}} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\vartheta}{2}} - \frac{5\pi}{12}\right)\right\} + c_1(r).$$

$c_1(r)$ und das später verwandte $c_2(r)$ sind durch die Wahl der unteren Integralgrenze bestimmt und hängen nicht von φ ab. Das zweite Integral in (7) wird

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{5i\pi}{8}} r^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3i\vartheta}{4}} \exp\left\{-i\left(\frac{2}{3} e^{\frac{3i\pi}{4}} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\vartheta}{2}} - \frac{5\pi}{12}\right)\right\} + c_2(r).$$

Fügen wir nun zu (7) Lösungen (6) der homogenen Differentialgleichung hinzu, sodaß die Glieder mit $c_1(r)$ und $c_2(r)$ wegfallen, so erhalten wir φ''_{21}; denn längs des Halbkreises bekommt man dann:

$$\frac{U''_0}{U'_6} \frac{\pi}{6} r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\vartheta}{2}} \frac{3}{\pi} r^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3i\vartheta}{2}} 2 \exp\{-i\cdots\} \cdot \exp\{+i\cdots\}$$
$$= \frac{U''_0}{U'_0} r^{-1} e^{-i\vartheta} = \frac{U''_0}{U'_0} \frac{1}{\eta}.$$

Auf dem vorstehenden Wege erhalten wir also aus (7) in eindeutiger Weise tatsächlich das gesuchte φ''_{21}. φ'_{21} folgt durch Integration von φ''_{21} nach η, wobei wir als Integrationsweg wiederum den Halbkreis nehmen, auf dem nun ja φ''_{21} bekannt ist. Es ist

$$\varphi'_{21}(-r) = \varphi'_{21}(+r) - \frac{U''_0}{U'_0} i\pi.$$

Analog erhält man schließlich, daß die reibungslose Lösung am positiven Rande $(+r)$ des Übergangsstreifens

$$1+\frac{U_0''}{U_0'}\,y\log y$$

am negativen Rande $(-r)$ zu

$$1+\frac{U_0''}{U_0'}\,y\log|y|-\frac{U_0''}{U_0'}\,i\pi y$$

wird, oder allgemein, daß φ_2, für positive y bekanntlich von der Form

$$1+\cdots+\frac{U_0''}{U_0'}\,\varphi_1\log y,$$

beim Übergang zu negativem y in

$$1+\cdots+\frac{U_0''}{U_0'}\,\varphi_1\log|y|-\frac{U_0''}{U_0'}\,i\pi\varphi_1$$

übergeht. Damit haben wir die Übergangssubstitution in φ_2 beim kritischen Punkte abgeleitet, die im Hinzutreten eines imaginären Teiles und damit eines Phasensprunges in der x-Komponente der Störung besteht. Es hat sich nach den vorstehenden Rechnungen herausgestellt, daß die Bestimmung der Übergangssubstitution auf die Bestimmung des physikalisch realen Zweiges des Logarithmus in φ_2 hinausläuft.

Über die Breite des Übergangsstreifens, für den wir im vorstehenden die Lösung φ_{21} ableiteten, läßt sich folgende Aussage machen. r muß ja so groß gewählt werden, daß die bei der vorstehenden Rechnung benutzten asymptotischen Näherungen für große r bis auf einen Fehler gültig sind, den wir wegen der auch nur näherungsweisen Gültigkeit der reibungslosen Lösungen außerhalb des Übergangsstreifens zugestehen[1]). Aus diesem so bestimmten r berechnet sich die Breite des Übergangsstreifens in der ursprünglichen y-Koordinate zu $2\varepsilon r = 2(\alpha R U_0')^{-\frac{1}{3}} r$. Sobald also αR nur groß genug ist, nimmt das reibungslose φ_{21}'' wegen der kleinen Breite des Übergangsstreifens, die in der Grenze nach 0 geht, an dessen Rändern tatsächlich die Werte an, die wir oben in den Randbedingungen ansetzten; ebenso ist φ_2 auf dem obigen Integrationswege noch genau genug gleich dem Wert 1, den wir

1) Das in der asymptotischen Entwicklung von φ_{21}'' für große η auf das Glied $\frac{U_0''}{U_0'}\frac{1}{\eta}$ folgende Glied ist $2\frac{U_0''}{U_0'}\frac{i}{\eta^4}$; hiernach kann man den erwähnten Fehler abschätzen.

für φ_{20} annahmen, sodaß wir die asymptotische Gültigkeit unserer Beziehungen für große αR nachgewiesen haben. Übrigens wird in § 6, 3 ein Hinweis auf eine etwas anders und erweitert gefaßte Ableitung der Übergangssubstitution gegeben.

Die Abb. 1 gibt für $\frac{U_0''}{U_0'} = 1$ ein graphisch gewonnenes qualitatives Bild des Verhaltens von φ_{21}' im Übergangsstreifen, getrennt in Realteil $\Re(\varphi_{21}')$ und Imaginärteil $\Im(\varphi_{21}')$.

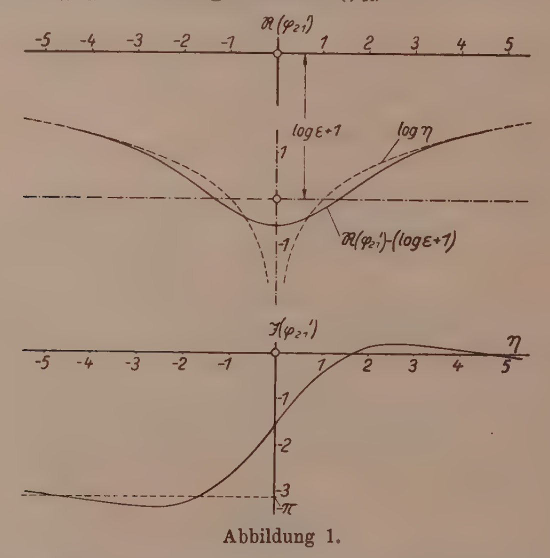


Abbildung 1.

Die Differentialgleichung (4) bzw. (5) liefert uns nun auch ohne weiteres das zweite Paar von Lösungen, die aus der allgemeinen Störungsgleichung für große αR folgen. Denn neben der Lösung φ_{21}'' von (5), die wir eben betrachteten, sind offenbar auch die Lösungen (6) der zugehörigen homogenen Differentialgleichung möglich, also

$$\varphi_3'' = \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \quad \text{und} \quad \varphi_4'' = \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$$

φ_3'' klingt für größere positive η sehr stark ab. Es werde

$$(8) \qquad \varphi_3 = \int_{+\infty}^{\eta} \int_{+\infty}^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\tfrac{2}{3} (i\eta)^{\frac{3}{2}}\right] d\eta\, d\eta$$

gesetzt. φ_4 geht für positive η nach unendlich und wird im folgenden nicht gebraucht werden. Der Fehler in φ_3 ist von der Größenordnung $\varepsilon \frac{U_0''}{U_0'}$.

Nach dem Grad ihrer Veränderlichkeit kann man φ_1 und φ_2 auch als „langsame“, φ_3 und φ_4 als „rasche“ Lösungen bezeichnen.

§ 4. Lösungen der Störungsgleichung an der Wand für $c \gg U$.

Es wird nützlich sein und unsere Anschauung in das Wesen der vier Integrale beleben, wenn wir sie in einem Spezialfall unabhängig vom letzten Abschnitt ableiten, und zwar wollen wir das für die Nachbarschaft der Wand ($U = 0$) in dem Fall tun, daß $c \gg U$ ist, also die kritische Stelle außerhalb der betrachteten Schicht liegt. Die allgemeine Störungsgleichung wird also für eine wandnahe Schicht, in der wir $U - c$ genähert durch c, U'' ebenfalls durch den Wert an der Wand U''_w ersetzen können:

$$(9) \qquad -i\alpha R\left\{c(\varphi'' - \alpha^2\varphi) + U''_w\varphi\right\} = \varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi.$$

Bezeichnen wir mit y_w den Abstand von der Wand, so haben die Lösungen dieser Differentialgleichung (9) die Form $\varphi = e^{ky_w}$. Wir erhalten hier nun in besonders durchsichtiger Weise die beiden Lösungspaare. Es wird nämlich

$$\begin{aligned} k^2 &= \tfrac{1}{2}\left\{-i\alpha Rc + 2\alpha^2 \pm \sqrt{-\alpha^2 R^2 c^2 - 4U''_w i\alpha R}\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{-i\alpha Rc + 2\alpha^2 \pm \left[i\alpha Rc - \frac{2U''_w}{c} + \frac{2iU''^2_w}{\alpha R c^3} \cdots\right]\right\}\end{aligned}$$

Das eine k^2 wird demnach annähernd $\alpha^2 - \dfrac{U''_w}{c} + i\dfrac{U''^2_w}{\alpha R c^3} \cdots$ und liefert uns bei ausschließlicher Berücksichtigung der größten Glieder bei großem αR das Paar der reibungslosen Lösungen, d. h. wegen der Abhängigkeit der Koeffizienten der Differentialgleichung von y_w nur den Anfang ihrer Entwicklung von der Wand aus, etwa

$$1 + \left(\alpha^2 - \frac{U''_w}{c}\right)\frac{y_w^2}{2!} \quad \text{bzw.} \quad y_w + \left(\alpha^2 - \frac{U''_w}{c}\right)\frac{y_w^3}{3!}.$$

Das andere k^2 wird $-i\alpha Rc$ und gibt uns φ_3 und φ_4. Die Lösung, die dem φ_3 des vorigen Abschnittes entspricht, wird bis auf einen konstanten Faktor

$$(10) \qquad e^{\frac{3i\pi}{4}\sqrt{\alpha R c}\, y_w} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\sqrt{\alpha R c}\, y_w}$$

klingt also sehr stark ab, sodaß die Veränderung der Koeffizienten der Differentialgleichung nicht weiter eingeht. Bemerkt sei gleich

an dieser Stelle, daß die Formel (10) sich auch aus dem allgemeinen Ausdruck (8) für φ_3 durch Spezialisierung für negativ große η gewinnen läßt.

Tietjens (l. c.) hat φ_3 aus einer gesonderten Grenzschichtgleichung gewonnen, während wir einheitlich alle Lösungen aus der allgemeinen Störungsgleichung ableiteten. φ_3 kann man als eine Art Grenzschichtlösung an der Wand oder mit anderen Worten äußere Reibungsschichtlösung auffassen. Im Falle $U'' \neq 0$ tritt aber im kritischen Punkte, an dem nach der reibungslosen Rechnung die eine Störungskomponente unendlich werden würde, eine zweite, innere Reibungsschichtlösung auf, die in § 3 als φ_{21} abgeleitet wurde. In dem oben erörterten Spezialfall größerer c fallen die beiden Reibungsschichten auch räumlich auseinander, sonst greifen sie in einander über. Der wesentliche Unterschied unserer Untersuchung gegenüber der von Tietjens liegt gerade in dem Auftreten der inneren Reibungsschicht.

§ 5. Formulierung der Randbedingungen.

Nachdem wir den Einblick in den Charakter der 4 Integrale der Störungsgleichung gewonnen haben, wenden wir uns wieder dem Randwertproblem zu und formulieren auf dieser Grundlage die Randbedingungen.

Zunächst nehmen wir ein Profil $U(y)$, das vom Werte $U = 0$ an der Wand bis zu einem Maximalwert steigt, den es dann konstant beliebig weit beibehält. Dies gilt z. B. für das wichtige Profil der Strömung längs einer Platte sehr gut. Da φ_4 für positive y über alle Grenzen wächst, kommt es in dem Lösungsaggregat nicht vor. Für $U =$ konst. sind die reibungslosen Lösungen $e^{-\alpha y}$ bzw. $e^{+\alpha y}$, d. h. wegen der notwendigen Beschränktheit können wir nur $e^{-\alpha y}$ brauchen[1]). Somit muß in diesem Gebiet $\frac{\varphi'}{\varphi} = -\alpha$ sein, wodurch wir also eine einfache Randbedingung für den Anfangspunkt des Gebietes mit konstantem U gewonnen haben, den wir künftig mit dem Index m kennzeichnen. φ_3 ist nämlich hier schon abgeklungen, also lautet die Bedingung

(11) $$C_1(\varphi'_{1m} + \alpha\varphi_{1m}) + C_2(\varphi'_{2m} + \alpha\varphi_{2m}) = 0$$

oder abgekürzt

(11a) $$C_1 \Phi_{1m} + C_2 \Phi_2 = 0.$$

---

1) $e^{+\alpha y}$ und φ_4 können sich nicht ausgleichen, da nach einer Bemerkung in § 1 $\alpha < \sqrt{\alpha R}$ ist.

An der Wand muß nun φ und φ' verschwinden. Wenn wir die Werte dort mit dem Index w bezeichnen, wobei wir in φ_{2w} und φ'_{2w} gleich die Übergangssubstitution angebracht haben, erhalten wir also

$$C_1 \varphi_{1w} + C_1 \varphi_{2w} + C_3 \varphi_{3w} = 0. \tag{12 a}$$

und

$$C_1 \varphi'_{1w} + C_2 \varphi'_{2w} + C_3 \varphi'_{3w} = 0 \tag{12 b}$$

oder

$$C_1 \varphi_{1w} + C_2 \varphi_{2w} - \frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}} (C_1 \varphi'_{1w} + C_2 \varphi'_{2w}) = 0. \tag{12 c}$$

$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}}$ findet sich nun bereits in der Arbeit von TIETJENS berechnet und läßt sich, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, durch die Größe D bei TIETJENS ausdrücken. Es ist

$$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}} = -\varepsilon D. \tag{13}$$

D ist dort als Funktion von z_0 aufgetragen; z_0 ist nichts anderes als der im η-Koordinatensystem (s. § 3) gemessene Abstand der Wand von der kritischen Stelle, den man mit η_w bezeichnen möge, also

$$\eta_w = -\frac{c}{U'_0} \frac{1}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Die Tabelle gibt $D(\eta_w)$ nach TIETJENS:

η_w	$D(\eta_w)$
0	$0{,}702 - 0{,}425\,i$
$-0{,}5$	$0{,}785 - 0{,}411\,i$
$-1{,}0$	$0{,}920 - 0{,}389\,i$
$-1{,}5$	$1{,}043 - 0{,}297\,i$
$-2{,}0$	$1{,}206 - 0{,}147\,i$
$-2{,}5$	$1{,}357 + 0{,}108\,i$
$-3{,}0$	$1{,}400 + 0{,}515\,i$
$-3{,}5$	$1{,}180 + 1{,}130\,i$
$-4{,}0$	$0{,}460 + 1{,}250\,i$
$-4{,}5$	$-0{,}0405 + 0{,}8080\,i$
$-5{,}0$	$0{,}0057 + 0{,}3645\,i$
$-5{,}5$	$0{,}1913 + 0{,}2393\,i$

Die beiden Bedingungen (11 a) und (12 c) liefern eine Determinantenbeziehung, aus der sich $\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_3}$ ausrechnen läßt. Wir erhalten

dadurch

$$-\varepsilon D = \frac{\Phi_{1m}\varphi_{2w} - \Phi_{2m}\varphi_{1w}}{\Phi_{1m}\varphi'_{2w} - \Phi_{2m}\varphi'_{1w}}$$

und indem wir noch durch η_w dividieren:

(15) $$-\frac{D}{\eta_w} = -\frac{U'_0}{c}\frac{\Phi_{1m}\varphi_{2w} - \Phi_{2m}\varphi_{1w}}{\Phi_{1m}\varphi'_{2w} - \Phi_{2m}\varphi'_{1w}}$$

Die rechte Seite der Gl. (15) ist bekannt, wenn wir die Parameter c und α vorschreiben; sie werde ganz allgemein mit $E(c;\alpha)$ bezeichnet. Die linke Seite ist als Funktion von η_w gegeben. Wir stellen uns nun ein Polardiagramm von $-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w}$ mit dem reellen Teil von $-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w}$ als Abszisse, dem imaginären Teil als Ordinate her (vgl. Abb. 3). Dann wählen wir ein bestimmtes c und tragen E in Funktion von α in das Polardiagramm ein, worauf wir die Schnittpunkte mit dem $-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w}$-Polardiagramm und damit das zu dem jeweiligen „Durchgangspunkt" (s. § 1) gehörende η_w bestimmen. Aus η_w läßt sich dann nach (14) ε und damit der letzte Parameter R ermitteln.

Über D ist noch zu bemerken, daß es für negativ große η in $\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{-\eta_w}}$ übergeht. Dies kann man entweder durch eine asymptotische Betrachtung des in (8) gegebenen Ausdruckes für φ_3 oder aus dem in § 4 direkt abgeleiteten Ausdruck (10) schließen, wenn man dort schließlich c durch η_w ausdrückt.

Bei einem symmetrischen U-Profil gewinnt man eine einfache Form der Randbedingung aus der Bemerkung, daß in diesem Falle φ in einen geraden und ungeraden Teil zerlegt werden kann, die jeder für sich der Störungsgleichung und den Grenzbedingungen genügen müssen. Man hat daher in der Mitte, da φ_4 auch hier nicht eingehen kann und φ_3 schon abgeklungen ist, die Bedingung

(16) $$C_1\varphi'_{1m} + C_2\varphi'_{2m} = 0.$$

bei geradem φ, oder

(17) $$C_1\varphi_{1m} + C_2\varphi_{2m} = 0$$

bei ungeradem φ, die an die Stelle von (11) tritt, während die Bedingung an der Wand (12) erhalten bleibt.

Tietjens hat in seiner Arbeit die eine Randbedingung an der Wand und zwar für die y-Komponente nach einem Vorschlag von

Prandtl in einer anderen Form angesetzt als wir. Da gelegentlich[1]) Zweifel an der Berechtigung dieser Randbedingung geäußert sind, weisen wir ihre inhaltliche Übereinstimmung mit der unseren nach. Wir beschreiben das Tietjenssche Verfahren formal und verweisen für die physikalische Begründung auf die Arbeit selbst. Tietjens läßt seine Reibungsschichtlösung, die unserem φ_3 entsprechen würde und mit φ_3^* (proportional v^* bei Tietjens) bezeichnet werde, für $\eta = +\infty$ nicht wie wir nach 0 gehen, sondern nach einem konstanten Wert $\varphi_3{}^*{}_\infty$ (proportional v_∞^*), sodaß also $\varphi_3^* = \varphi_3 + \varphi_{3\infty}^*$ ist; denn $\varphi_3{}^{*\prime}{}_\infty$ ist ebenso wie $\varphi'_{3\infty}$ gleich 0 gesetzt. Dann wird bei Tietjens die Konstante $\varphi_{3\infty}^*$ so bestimmt, daß $\varphi_{3w}^* = 0$ wird, d. h. $\varphi_{3\infty}^* = -\varphi_{3w}$. Schließlich wird die y-Komponente, die aus den reibungslosen Lösungen für die Wand folgt, gleich v_∞^* gesetzt, d. i.

$$C_1\varphi_{1w} + C_2\varphi_{2w} = C_3\varphi_{3\infty}^*,$$

während wir oben

$$C_1\varphi_{1w} + C_2\varphi_{2w} + C_3\varphi_{3w} = 0$$

setzten. Beide Bedingungen sind also nach der Beziehung zwischen $\varphi_{3\infty}^*$ und φ_{3w} inhaltlich identisch.

§ 6. Das Gleichgewicht der Strömung längs einer ebenen Platte.

1. Der oben entworfene Rechnungsgang soll zunächst auf das Geschwindigkeitsprofil angewandt werden, daß sich bei größeren Reynoldsschen Zahlen an einer Platte ausbildet, die in einem gleichförmigen Flüssigkeitsstrom von unendlicher Ausdehnung parallel zu diesem eingetaucht ist, wobei die Vorderkante der Platte senkrecht zur Strömungsrichtung verläuft. Wir wählen gerade diese Geschwindigkeitsverteilung, weil Experimente über ihre Stabilität angestellt sind und auch die Voraussetzungen für die Genauigkeit unserer Näherung hier besonders günstig liegen. Dies Profil ist von Blasius nach Ansätzen von Prandtl[2]) berechnet und ist besonders dadurch charakterisiert, daß es an der Wand mit

---

1) Vgl. Noether, l. c. Zs. f. angew. Math. u. Mech. **6**, 1926, S. 243 und die anschließende Diskussion zwischen Prandtl und Noether, ebenda S. 339/340.

2) L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. Internat. Math.-Kongresses, Heidelberg 1904, wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“ Göttingen 1927.

H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zs. f. Math. u. Phys. Bd. 56, S. 1, 1908.

verschwindender Krümmung beginnt und sich nach außen mit scharfer Asymptote (entsprechend dem asymptotischen Verhalten des Fehlerintegrals) der ungestörten Geschwindigkeit anschließt (s. Abb. 2).

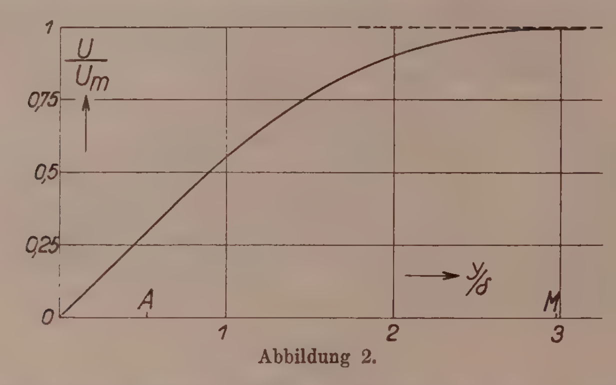


Abbildung 2.

Für unsere Zwecke wird es nützlich sein, eine angenäherte Darstellung des Profiles zu besitzen. Nach dem Vorstehenden wird man am einfachsten die Geschwindigkeitsverteilung an der Wand mit einem Geradenstück beginnen lassen und den asymptotischen Anschluß an die ungestörte Geschwindigkeit durch einen Anschluß im Endlichen (bei M in Abb. 2) ersetzen, also das Geradenstück etwa durch ein Parabelstück fortsetzen. Wenn wir mit y_m den Abstand vom Parabelscheitel bezeichnen, so lassen wir nach der einen Seite U konstant mit seinem maximalen Wert ($=1$) sich fortsetzen, nach der anderen Seite wird $U = 1 - y_m^2$, wenn wir die Bezugsgrößen, mit denen wir die angewandten Dimensionslosen bilden, entsprechend wählen. Nach der Wand zu und zwar von $y_m = 0{,}84$ (bei A in Abb. 2) ab soll dann $U = 1{,}705 - 1{,}680\, y_m$ sein, sodaß an der Wand $(U = 0)\, y_m = 1{,}015$ ist. Damit ist U selbst genau genug dargestellt, dagegen dürfen wir nicht in dem Gebiet an der Wand etwa $U' =$ konst., $U'' = 0$ setzen. Es ist vielmehr mit y_w als Wandabstand entsprechend den ersten Gliedern der Blasiusschen Potenzreihe

$$U' = 1{,}68\,(1 - 3{,}65\, y_w^3),$$
$$U'' = -18{,}4\, y_w^2,$$

gültig in Wandnähe, soweit wir diese Größen später gebrauchen.

Die reibungslosen Lösungen φ_1 und φ_2 berechnet man nach den Reihenformeln von § 2 für parabolische Verteilung von U und unter Benutzung der Lösungen $\mathfrak{Sin}\,\alpha y$ und $\mathfrak{Cos}\,\alpha y$ für lineares U. Damit gelingt es, die Lösungen, abgesehen von der Übergangs-

substitution, für Wand und Parabelscheitel genügend genau darzustellen, wie nähere Betrachtungen zeigten[1]). Die Übergangssubstitution darf man natürlich nicht mit dem roh genäherten Profil (Gerade + Parabel) berechnen, sondern mit dem genaueren Wert von $\frac{U_0''}{U_0'} = -3{,}9\,c^2$, den man aus den angegebenen Formeln für U'' und U' erhält, wenn man noch beim kritischen Punkt gemäß obigem $c = U = 1{,}68\,y_w$ setzt.

2. Die Schnittpunkte der E-Kurven (s. § 5) mit dem $-\frac{D}{\eta_w}$-Polardiagramm bestimmen wir zunächst für $c \sim 0$. Ein imaginärer Bestandteil tritt in E durch den Phasensprung ein, der mit $\frac{U_0''}{U_0'} \sim c^2$ geht, sodaß also für genügend kleine c E rein reell ist. Die Schnittpunkte mit dem $-\frac{D}{\eta_w}$-Diagramm liegen daher entweder bei $-\frac{D}{\eta_w} = 0{,}56$; $\eta_w = -2{,}3$ oder $-\frac{D}{\eta_w} = 0$ und negativ sehr großem η_w. Indem man nur die linearen Glieder in c und α berücksichtigt, erhält man

$$E = \frac{-1{,}19\,\alpha + 2c}{0{,}596\,c \cdot 3{,}36}. \tag{18}$$

Für den ersten Schnittpunkt mit $-\frac{D}{\eta_w} = 0{,}56$ ist also $\alpha = 0{,}74c$ und unter Berücksichtigung von $\eta_w = -2{,}3$ oder

$$(1{,}68\,\alpha R)^{\frac{1}{3}}\,0{,}596\,c = 2{,}3,$$
$$R = 46\,c^{-4}.$$

Für den zweiten Schnittpunkt mit $\frac{D}{\eta_w} = 0$ ist nach (18) $\alpha = 1{,}68c$. In diesem Bereich wird η_w sehr groß, daher $\varepsilon D = (2\alpha R c)^{-\frac{1}{2}}(1+i)$ nach (10). Zur Bestimmung von R müssen wir hier die in c und α höheren Glieder heranziehen und benutzen dazu etwa den Imaginärteil von D, dem für die Durchgangspunkte der Imaginärteil von $-E\eta_w$ gleich sein soll. Dieser ergibt sich unter Zugrundelegung des eben berechneten α zu $4{,}36\,i\,c^4$, sodaß $R = 0{,}0156\,c^{-10}$ wird. Wir können nun auch noch η_w berechnen und erhalten dafür $0{,}21\,c^{-2}$, d. h. für kleine c tatsächlich so große Werte, welche die Benutzung des asymptotischen Wertes von D rechtfertigen.

1) Eine besondere Erörterung ist bei diesem Verfahren zur Darstellung von φ_2 notwendig, wenn der kritische Punkt ($U = c$) sehr nahe an den Anschlußpunkt Gerade-Parabel heranrückt. Doch soll auf die Wiedergabe dieser Überlegung, die für die numerische Rechnung bedeutungsvoll, für das Ganze aber uninteressant ist, hier verzichtet werden.

Diese beiden Grenzfälle sind auch, abgesehen von der expliziten Darstellung der Beziehung zwischen R, α und c deshalb bedeutungsvoll, weil bei ihnen mit größter Genauigkeit unsere asymptotischen Rechnungen für große αR zutreffen. Die Formeln liefern übrigens eine brauchbare Näherung bis etwa $c = 0{,}05$.

Die anderen Durchgangspunkte werden nach dem in § 5 entwickelten graphischen Verfahren ermittelt (s. Abb. 3). Jenseits eines besimmten c-Wertes (in Abb. 3 z. B. bei $c = 0{,}43$) liefern die E-Kurven keinen Schnittpunkt mehr mit dem $-\frac{D}{\eta_w}$-Diagramm während sie sonst zwei Schnittpunkte geben. Ehe wir in die physikalische Diskussion eintreten, sei noch etwas über die Genauigkeit unserer Rechnung gesagt.

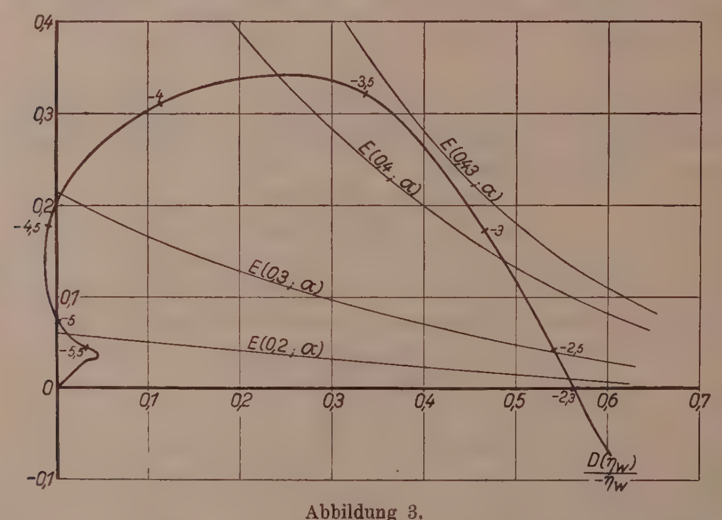


Abbildung 3.

3. Unsere ganze Rechnung ist eine Näherung, die umso schlechter stimmt, je kleiner die dabei auftretenden αR werden. Unter anderem haben wir stets mit der Übergangssubstitution des § 3 gearbeitet, obwohl der Übergangsstreifen keineswegs immer noch klein bleibt, sodaß man nicht mehr wie dort $-\frac{U''}{U'}\varphi_2$ im Übergangsstreifen annähernd konstant nehmen darf und auch die Anschlußbedingungen gemäß den größeren $|y|$-Werten am Rande des Übergangsstreifens zu ändern sind. Nun läßt sich allerdings die Übergangssubstitution auch unter etwas allgemeineren Bedingungen, als dort angegeben, ableiten. Als Differentialgleichung für φ_2 in η im Übergangsstreifen können wir nämlich

$$(19)\; i\varphi_2'''' + \eta\varphi_2'' = \varphi_2\left[\varepsilon\,\frac{U''}{U_0'} + \varepsilon^2\alpha^2\eta\left(1 + \frac{U_0''}{U_0'}\,\frac{\varepsilon\eta}{2!} + \frac{U_0'''}{U_0'}\,\frac{\varepsilon^2\eta^2}{3!} + \cdots\right)\right] - \varphi_2''\eta\left(\frac{U_0''}{U_0'}\,\frac{\varepsilon\eta}{2!} + \frac{U_0'''}{U_0'}\,\frac{\varepsilon^2\eta^2}{3!} + \cdots\right)$$

ansetzen, wobei die Ableitungen von U die ursprünglichen nach y sind[1]). Das Glied auf der rechten Seite von (19) ist nun im Unterschied gegen früher nicht mehr konstant im Übergangsstreifen. Wir können dann verifizieren, daß eine Lösung von (19) existiert, die sich für große $|\eta|$ an die reibungslose Lösung φ_2 mit dem früher als physikalisch real erkannten Zweige des Logarithmus anschließt. Indem man nämlich die rechte Seite von (19) als inhomogenes Glied einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ_2'' auffaßt, weist man mit denselben Mitteln (asymptotische Diskussion von Hankelschen Funktionen und von Integralen damit) wie in § 3 nach, daß auf dem dort eingeführten Halbkreise die Beziehung

$$\varphi_2'' = \varphi_2\left[\varepsilon\,\frac{U''}{U_0'\eta} + \varepsilon^2\alpha^2\left(1 + \frac{U_0''}{U_0'}\,\frac{\varepsilon\eta}{2!} + \cdots\right)\right] - \varphi_2''\left(\frac{U_0''}{U_0'}\,\frac{\varepsilon\eta}{2!} + \cdots\right),$$

identisch mit der reibungslosen Störungsgleichung gilt, wodurch die Übergangssubstitution auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen bestätigt ist. Einen kleinen Fehler begehen wir noch dadurch, daß wir an der Wand φ_2 bereits reibungslos, natürlich mit Einschluß des Phasensprunges nehmen, also im übrigen den Reibungseinfluß als abgeklungen voraussetzen[2]). Außerhalb des Übergangsstreifens (z. B. bei dem Punkt mit dem Index m) ist der Fehler in φ_1 und φ_2 durch Vernachlässigung der Reibung von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1}$, also immer sehr klein; dagegen ist der Fehler in φ_3 von der Größenordnung $\varepsilon\,\frac{U_0''}{U_0'}$ im ungünstigsten Falle 0,055.

Diese Überschlagsbetrachtung der Fehler unserer Näherung lehrt, daß unsere Rechnung die physikalisch grundsätzlichen Züge durchaus richtig wiedergibt, zugleich aber, daß bei den letzten Durchgangspunkten (kleine Reynoldssche Zahlen) die Zahlenwerte der Störungsparameter und von ε mit Fehlern von einigen Prozent

---

1) Die beiden auf der rechten Seite von (19) nicht angeschriebenen Reibungsglieder $\varepsilon^2 2\alpha^2 i\varphi_2''$ und $-\varepsilon^4\alpha^4 i\varphi_2$ könnten wir leicht noch mit in die folgende Betrachtung nehmen; doch ändern sie in unserem Falle noch nicht merklich die Übergangssubstitution.

2) Über das Abklingen der inneren Reibungsschichtlösung vgl. für den einfachsten Fall die Anmerkung in § 3 S. 29.

behaftet sind, was sich besonders bei der Bestimmung von R aus ε auswirkt.

Es mag überraschen, daß in unserer Rechnung das Geschwindigkeitsprofil an der Platte nur von y abhängig angenommen wurde, während in Wirklichkeit dort auch eine, allerdings schwache Abhängigkeit von x besteht. Nun läßt sich zeigen, daß die Berücksichtigung dieser Abhängigkeit bei der Strömung an der Platte nur Glieder der Größenordnung $(\alpha R)^{-1}\varphi'''$, $(\alpha R)^{-1}\varphi'$, $(\alpha R)^{-1}\alpha^2\varphi'$ und noch kleinere hineinbringt, also scheinbare neue Reibungsglieder auftreten, die in unserer Rechnung sehr wenig ausmachen. Da diese Betrachtung sich für eine ganze, wichtige Klasse von Profilen, die „Grenzschichtprofile" (vgl. den Literaturnachweis in Fußnote 2) Seite 35), allgemein durchführen läßt, sei an dieser Stelle nur dieser Hinweis gegeben.

4. Bei der Angabe der Ergebnisse unserer Berechnung der Durchgangspunkte wollen wir die bisher abgekürzten Dimensionslosen voll ausschreiben. Anstatt der vorher verwandten, ziemlich willkürlich bestimmten Bezugslänge (halbe Breite einer gewissen, in das Profil eingezeichneten Parabel) wollen wir eine physikalisch sinnvolle Bezugslänge einführen. Die Bestimmung einer charakteristischen Länge aus dem vorliegenden ebenso wie aus anderen Grenzschichtprofilen ist durch den asymptotischen Anschluß an die ungestörte Geschwindigkeit erschwert, sodaß auch fast alle bisherigen Definitionen der „Grenzschichtdicke" nicht rationell sind. Frei von Willkür, experimentell genau bestimmbar und den Gesamtverlauf des Profiles berücksichtigend ist nur die Definition der Grenzschichtdicke:

$$\delta = \int \left(1 - \frac{U}{U_m}\right) dy, \tag{20}$$

wobei das Integral von der Wand bis zur ungestörten Potentialgeschwindigkeit U_m zu erstrecken ist. Diese Länge, früher auch Verdrängungsdicke, hier aber schlechthin Grenzschichtdicke genannt, gibt, wenn man sie mit U_m multipliziert, gerade das Maß für die Verringerung der Durchflußmenge durch die Grenzschichtreibung. δ ist in unserem Falle das 0,341-fache unserer früheren Bezugslänge. Als Reynoldssche Zahl R nehmen wir also $\frac{U_m \delta}{\nu}$.

Nach unserer Ermittlung der Durchgangspunkte gehören zu jedem R je zwei Störungsparameter, bis daß zu der letzten kritischen Reynoldsschen Zahl 420 nur je ein Störungsparameter gehört. Die Abb. 4 und 5 zeigen die Störungsparameter $\alpha\delta$, $\frac{c}{U_m}$,

$\frac{\beta\delta}{U_m}$ in Abhängigkeit von den logarithmisch aufgetragenen R. Das von diesen Kurven umschlossene Gebiet gibt offenbar den Bereich der labilen Schwingungen an. Der Zeiger r bei β und c soll andeuten, daß die Diagramme nur über den reellen Teil dieser Größen Auskunft erteilen.

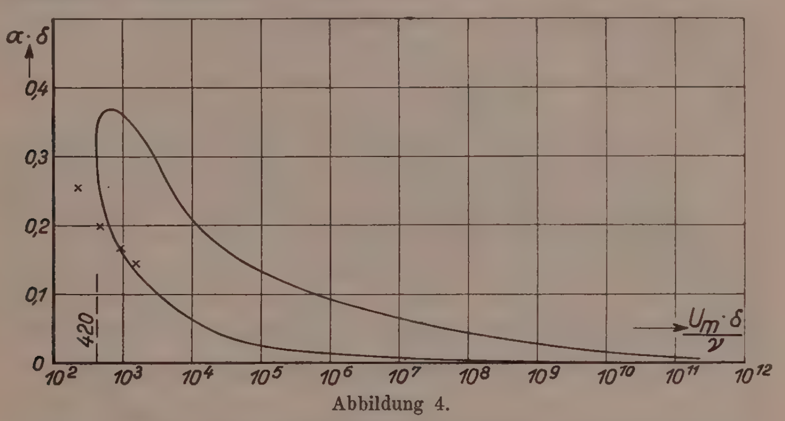


Abbildung 4.

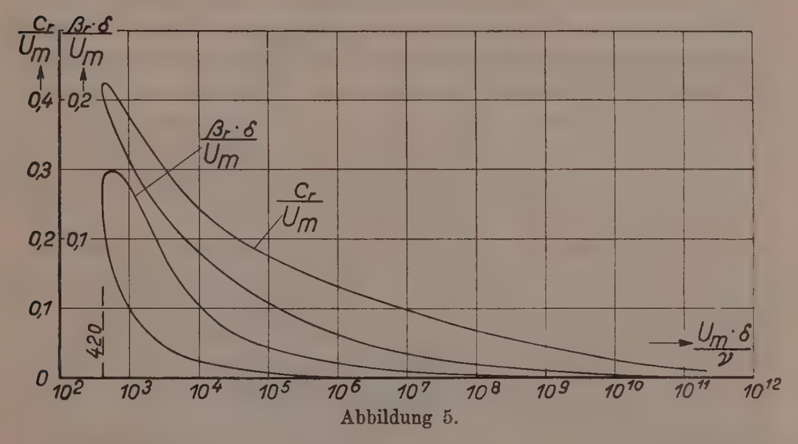


Abbildung 5.

Hier seien einige Durchgangspunkte, wie sie sich aus unserer Rechnung an Abb. 3 ergeben, zahlenmäßig angegeben:

$\frac{c}{U_m}$	$\alpha\delta$	$\frac{\beta\delta}{U_m}$	R
0,4	0,272	0,109	445
0,4	0,368	0,147	716
0,2	0,076	0,015	7330
0,2	0,160	0,032	34800

Ferner seien noch einmal in unserer jetzigen Darstellung die Formeln für ganz große R angegeben, obwohl sie physikalisch kaum noch wichtig sind:

$$\frac{c}{U_m} = \left(\frac{R}{15{,}7}\right)^{-\frac{1}{4}}, \qquad \alpha\delta = 0{,}252\,\frac{c}{U_m}$$

und für den anderen Zweig der Gleichgewichtskurve:

$$\frac{c}{U_m} = \left(\frac{R}{0{,}0053}\right)^{-\frac{1}{10}}, \qquad \alpha\delta = 0{,}573\,\frac{c}{U_m}.$$

Wir stellen zunächst fest, daß ein außerordentlich schmaler Bereich von Schwingungen für die Laminarströmung gefährlich wird. Ebenso wie für die R eine untere Grenze 420 existiert, gibt es für die Störungsparameter eine obere Grenze, nach deren Überschreitung keine Labilität mehr eintritt: $\frac{c}{U_m} = 0{,}425$, $\alpha\delta = 0{,}367$, $\frac{\beta\delta}{U_m} = 0{,}148$. Besonders auffallend sind die im Vergleich zur Grenzschichtdicke großen Wellenlängen λ der Störung; λ ist ja $\frac{2\pi}{\alpha}$, also ist das kleinste $\lambda = \frac{2\pi}{0{,}367}\delta = 17{,}1\,\delta$. Auch gewisse Beobachtungen von Prandtl an dem eingangs erwähnten Gerinne, bei dem ganz vorne die Strömung etwas ähnlich der Plattenströmung ist, scheinen auf solche großen Wellenlängen zu deuten. Da δ längs der Platte wächst, ist es vielleicht zweckmäßig, auch eine Grenze von λ anzugeben, die von x unabhängig ist. Nach Abb. 4 gehört zu jedem $\frac{U_m\delta}{\nu}$ ein gewisser Bereich labiler $\alpha\delta$. Aus $\alpha\delta$ und $\frac{U_m\delta}{\nu}$ läßt sich nun δ eliminieren, und wir können demnach das größtmögliche labile α oder das kleinstmögliche λ bei gegebenem U_m und ν ermitteln. Das kleinstmögliche labile λ ist $8400\,\frac{\nu}{U_m}$; dies λ entspricht annähernd gerade der stationären Schwingung bei $R = 420$. Wenn man die Plattenlänge von der Vorderkante bis zur Stelle $R = \frac{U_m\delta}{\nu} = 420$ mit l_1 bezeichnet, so ist $l_1 = 59000\,\frac{\nu}{U_m}$, da $\delta = 1{,}73\,l\sqrt{\frac{\nu}{U_m l}}$ ist; das obige λ ist also $\frac{l_1}{7}$.

Tietjens hat l. c. ein Profil auf Stabilität untersucht, das von der Wand linear bis U_m ansteigt uud dann mit einem Knick sich konstant fortsetzt. Dies Profil ist also als eine rohe Approximation des unseren anzusehen. Die von Tietjens berechneten Durchgangspunkte sind seiner Abbildung 17 entnommen und teilweise in

unsere Abb. 4 mit Kreuzen eingetragen, wobei b_1 bei TIETJENS gleich 2δ ist. TIETJENS bekommt den einen Zweig der Gleichgewichtskurve in recht guter Näherung. Da er jedoch nur diesen einen Zweig erhält, so bekommt er demnach auch keine Grenze für R noch für $\alpha\delta$, was an dem durchgängigen Verschwinden der Krümmung des TIETJENSschen Profiles liegt.

Die Stabilität von Profilen mit Krümmung hatte HEISENBERG in einer Arbeit[1]) zu untersuchen unternommen. Im allgemeinen nimmt HEISENBERG $\alpha = 0$ an; die Frage der Konvergenz der Entwicklung der Lösungen nach α wird nicht geklärt. Die Übergangssubstitution für φ_2 (bei HEISENBERG φ_4) wird auf andere und nicht ganz zwingende Weise abgeleitet. Der Zahlenwert des Phasensprunges stimmt in seinem speziellen Falle mit dem unseren überein. Bis zur Durchrechnung eines Profiles ist HEISENBERG nicht vorgedrungen und hat sich auf Vermutungen beschränkt, die teilweise — bezüglich der Existenz einer oberen Grenze für α und einer unteren Grenze für R — in ähnlicher Richtung liegen wie unsere Ergebnisse an dem speziellen Profil der Strömung längs der Platte.

5. Die Gegenüberstellung unserer Ergebnisse mit Experimenten, wie sie insbesondere von BURGERS und VAN DER HEGGE ZIJNEN[2]) und von HANSEN[3]) vorliegen, ist aus zwei Gründen unvollkommen. Erstens weiß man nicht über die in Wirklichkeit auftretenden Störungen Bescheid, dann ist es auch nicht klar, wie weit der von diesen Autoren definierte Umschlagspunkt mit unserem Labilitätsbeginn der Laminarströmung übereinstimmt. BURGERS und ähnlich auch HANSEN definieren den Umschlagspunkt in folgender Weise. Vorn an der Platte gibt es ja ein laminares Stück, das sich nach PRANDTL-BLASIUS ausbildet; nach dem Umschlag gibt es ebenso einen ausgesprochen turbulenten Teil, dessen Gesetze von PRANDTL und von KÁRMÁN (1/7 Potenzgesetz usw.) aufgeklärt wurden. In beiden Bezirken nimmt der Geschwindigkeitsgradient unmittelbar an der Wand beim Fortschreiten stromabwärts stets ab, nur im Übergangsgebiet erfolgt eine Zunahme. Die kritische Reynoldssche Zahl wird nun einfach aus der Stelle des Minimums des Geschwindigkeitsgradienten berechnet, während die Instabilität der Laminar-

1) W. HEISENBERG: Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. Ann. d. Phys. IV, Bd. 74, S. 597, 1924.

2) I. M. BURGERS: Proc. of the First Intern. Congress for Applied Mechanics Delft 1924, S. 113.

B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN: Thesis Delft 1924.

3) M. HANSEN: Zs. f. angew. Math. u. Mech. 8, S. 185, 1928.

strömung wahrscheinlich doch schon früher, bei kleineren δ, also bei kleinerem R einsetzen dürfte. Daher dürfen wir höchstens eine Bestätigung der Größenordnung unserer berechneten kritischen Reynoldsschen Zahlen erwarten. Es ist zu beachten, daß die Grenzschichtdicke dieser Autoren das 3,18-fache der unseren ist. Im Mittel erhielten sie in unserem Maß eine kritische Reynoldssche Zahl um 950 [1]) (aus ihrem Wert 3000 umgerechnet), während sie bei mehr Störung bis zu 500 (bei einem unmittelbar an der Plattenschneide in den Strom eingesetzten Störungssieb) herunterkamen. Wenn wir bedenken, daß bei unserer Rechnung bei 420 gerade noch eine einzige Partialschwingung existierte, die nicht gedämpft wurde, während beim experimentell ermittelten Umschlagspunkt wohl schon ein ziemlich erhebliches Anwachsen von kleinen Störungen erfolgt ist, so wird man unter Berücksichtigung der vorhergehenden kritischen Bemerkungen sagen können, daß unsere Rechnungsergebnisse mit den Experimenten in recht gutem Einklang stehen.

Gerade für den Vergleich mit den Experimenten erscheint es wichtig, die Größe der Anfachung bzw. Dämpfung und auch die Verteilung der Schwingungsamplitude zu kennen. Diese und andere Fragen, besonders auch das Verhalten anderer Profile sollen in einer zweiten Mitteilung behandelt werden.

---

1) Da unser $R = \frac{U_m \delta}{\nu} = 1,73 \sqrt{\frac{U_m l}{\nu}} = 1,73 \sqrt{R_l}$ wo l die Plattenlänge von der Vorderkante aus ist, so entspricht dieser Zahlwert einem R_l von 300 000.

Aus dem Allgemeinen Chemischen Universitäts-Laboratorium
Göttingen.

Einige Beobachtungen über die Ultraviolettbestrahlung des Ergosterins.

Von

A. Windaus, K. Westphal, F. v. Werder und **O. Rygh.**

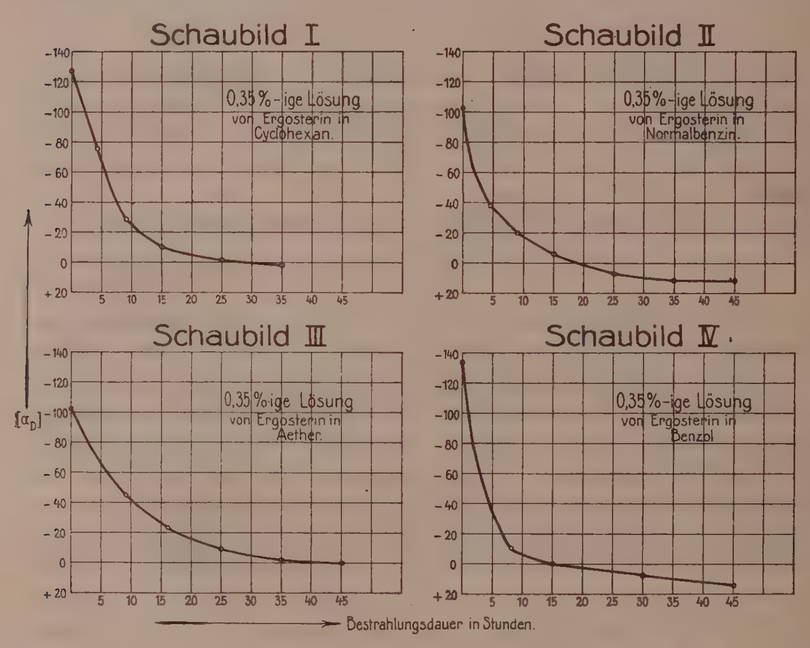
Vorgelegt von A. Windaus in der Sitzung am 17. Mai 1929.

In der vorliegenden Arbeit geben wir einige Beobachtungen wieder, die wir im Laufe der letzten beiden Jahre bei der Ultraviolettbestrahlung des Ergosterins gemacht haben. Die auf die Untersuchung verwendete Mühe ist groß, die Ergebnisse sind gering und unvollkommen. Doch glauben wir, durch die hier mitzuteilenden Vorversuche so weit gekommen zu sein, daß wir nun mit mehr Aussicht auf Erfolg die systematische Bearbeitung der photochemischen Umwandlung des Ergosterins beginnen können. Über dieses Thema sind seit 1927 eine Anzahl wichtiger Untersuchungen erschienen; die von anderer Seite erhaltenen Ergebnisse weichen in einigen Punkten von den unserigen ab. Wir wollen aber die Besprechung dieser Abweichungen verschieben, bis die Sachlage weiter geklärt ist.

Bei unsern ersten Versuchen haben wir die zu bestrahlende Lösung nicht bewegt; es ist also keine gleichmäßige Bestrahlung aller Teile der Lösung erfolgt. Außerdem haben wir während und nach der Bestrahlung die Luft nur unvollkommen ausgeschlossen. Den Verlauf der Reaktion haben wir meist in der Weise verfolgt, daß wir die Veränderung der optischen Drehung in der bestrahlten Lösung gemessen haben. Als Lösungsmittel haben wir Alkohol, Äther, Essigester, Cyklohexan, Benzin, Benzol und später auch Methyl-cyklohexan und Dekalin verwendet.

Werden gleich konzentrierte Lösungen unter möglichst gleichen Bedingungen mit Magnesiumfunkenlicht bestrahlt, verlaufen die Kurven, welche die Abnahme der negativen Drehung mit der Zeit

veranschaulichen, außerordentlich ähnlich. Der Einfluß der verwendeten Lösungsmittel scheint sehr gering zu sein, selbst bei Benzol. Das hängt damit zusammen, daß das Magnesiumfunkenlicht (im Gegensatz zum Quecksilberbogenlicht) so langwellig ist, daß es von den hier verwendeten Lösungsmitteln nur wenig absorbiert wird. Zur Veranschaulichung unserer Versuche geben wir einige Kurven wieder.



I. Bestrahlungen in der Quarzwalze.

Seit 1928 haben wir unsere Versuche in der Weise vorgenommen, daß wir in einem doppelwandigen Quarzhohlgefäß [1]) eine ätherische Lösung von Ergosterin zum Sieden erhitzt haben und gleichzeitig einen mit Pyrogallol-lösung gewaschenen Stickstoffstrom durch die Lösung geschickt haben; im Hohlraum der doppelwandigen „Quarzwalze“ haben wir eine Magnesiumfunkenstrecke erzeugt. Nach Beendigung der Bestrahlung haben wir den Äther im Vakuum verdampft, den Rückstand in Alkohol gelöst und mit überschüssiger Digitonin-lösung versetzt. Die Wägung des abge-

1) Schichtdicke etwa 1,4 cm; innerer Durchmesser der Walze 7,2 cm. S. auch Nachrichten d. Ges. d. Wissenschaften, Göttingen, Math.-phys. Kl. 1928, S. 205, Anmerkung.

schiedenen Digitonids gibt uns die Menge des unveränderten Ergosterins; das Filtrat des Digitonids haben wir nach dem Zusatz von Wasser mit Petroläther mehrmals ausgeschüttelt und den gewaschenen und getrockneten Petrolätherauszug eingedunstet. Alle diese Operationen haben wir in einer besonderen Apparatur unter möglichst vollständigem Ausschluß von Luft vorgenommen. Den Rückstand des Petrolätherauszuges haben wir als unser Ausgangsmaterial verwendet.

Bei unsern Bestrahlungen haben wir zwischen 8—100% des Ergosterins in durch Digitonin nicht mehr fällbare Produkte umgewandelt; es zeigte sich, daß bis zu Umwandlungen von 90% 0.1 γ des aufgearbeiteten Produkts antirachitisch wirksam waren. Nur wenn über 95% des Materials umgewandelt waren, kamen wir zu Produkten, die selbst bei 1 γ antirachitisch nicht mehr sicher wirkten.

Bestrahlt man, bis etwa 10% des Ergosterins umgewandelt sind, beträgt die Drehung des Bestrahlungsprodukts, nach Entfernung des Ergosterins, für $[\alpha]_D$ etwa -15^0, bei Umwandlung von 50% ist $[\alpha]_D = -30^0$ und bei 90% Umwandlung etwa -5^0. Das bei einer Umwandlung von über 90% erhaltene Bestrahlungsprodukt dreht positiv. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man ein von Ergosterin befreites Kurzbestrahlungsprodukt weiter bestrahlt. Während bei der Bestrahlung des Ergosterins die negative Drehung allmählich absinkt, ergibt sich bei der Weiterbestrahlung des ergosterinfreien Kurzbestrahlungsprodukts zunächst ein Ansteigen[1]) und dann wieder ein Abfallen der negativen Drehung.

Unsere ergosterinfreien, wirksamen Bestrahlungsprodukte zeigen fast alle ein ähnliches Spektrum mit einem charakteristischen Maximum bei 270—280 mμ. In den unwirksamen Überbestrahlungsprodukten ist dieses Maximum fast verschwunden.

Bei Zutritt von Luft verändern sich unsere Bestrahlungsprodukte langsam bei 18^0, rasch bei 100^0. Diese Oxydation gibt sich durch eine Änderung der Drehung und eine Änderung des Spektrums zu erkennen. Übrigens haben wir den Eindruck, daß die „Photoprodukte“ desto empfindlicher gegen Sauerstoff sind, je kürzer sie bestrahlt worden sind und je sorgfältiger die Luft während der Bestrahlung ausgeschlossen war. Beim Stehen an der Luft geht die antirachitische Wirkung der Präparate nur lang-

1) Dieser Anstieg der negativen Drehung beruht nicht etwa auf einer Rückbildung von Ergosterin. Wir haben keinen Anhaltspunkt dafür gefunden, daß sich ein Gleichgewicht zwischen Ergosterin und seinen Bestrahlungsprodukten einstellt. Dagegen halten wir es für wahrscheinlich, daß die Zunahme der negativen Drehung durch Oxydationsprozesse bedingt ist.

sam verloren. Bemerkenswert ist es auch, daß selbst, wenn Sauerstoff während der Bestrahlung durch die Lösung geleitet wird, antirachitisch noch wirksame Präparate erhalten werden.

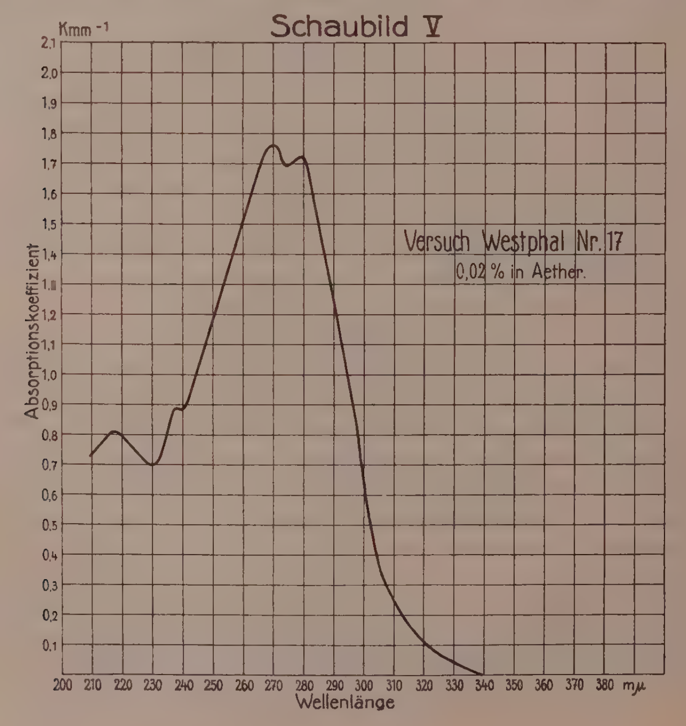
Ob sich luftfrei bestrahlte Produkte im Hochvakuum völlig unzersetzt halten, können wir noch nicht mit Bestimmtheit sagen; unsere Ergebnisse sind widerspruchsvoll, vermutlich weil der vollkommene Ausschluß von Luft während der Aufarbeitung nicht immer geglückt war.

Beispiele.

A. Das Verhalten der Bestrahlungsprodukte bei der Weiterbestrahlung.

Versuch Westphal No. 17.

1,95 g Ergosterin in 0.56%iger ätherischer Lösung wurden 10′ bestrahlt. Die quantitative Bestimmung ergab, daß 8% umgewandelt waren. Die Drehung des Bestrahlungsproduktes betrug für $[\alpha]_D = -16^0$. Das Absorptionsspektrum ist auf Schaubild V wiedergegeben, das Produkt war bei 0.1 γ voll wirksam. Dieses Pro-



dukt wurde nun bei möglichst vollständigem Ausschluß von Luft weiterbestrahlt. An herausgenommenen Proben wurde Drehung, Spektrum und Wirkung untersucht. Wir verzichten auf die vollständige Wiedergabe aller Absorptionsspektren, da es sich ja zweifellos um die Spektren von Gemischen handelt; wir geben nur die Absorptionskoeffizienten einer 0.02 %igen ätherischen Lösung bei 280 mμ wieder und erwähnen, daß die Absorption im kurzwelligeren Gebiet sich zunächst wenig ändert, aber bei langdauernder Bestrahlung ebenfalls zurückgeht.

Dauer der Weiterbestrahlung	0′	15′	2^h 15′	4^h	8^h	14^h	22^h	34^h
$[\alpha]_D$	-16^0	-27^0	-33^0	-29^0	-21^0	-4^0	$+4^0$	$+8^0$
Absorptionskoeffizient für 280 mμ	1.7	2.2	1.7	1.8	1.8	1.1	0.6	0.15
Antirachitische Wirkung von 0.1 γ	+	+	+		+			−

B. Die analytische Zusammensetzung der Bestrahlungsprodukte.

Versuch Westphal No. 8.

1.44 g Ergosterin in 0.8 %iger ätherischer Lösung wurden 1 Stunde bestrahlt. Es wurden 44 % des Ergosterins verändert. Die Drehung für $[\alpha]_D$ betrug -40^0. Der Absorptionskoeffizient bei 280 mμ war auffallend hoch, der höchste, den wir beobachtet haben; er betrug für die 0,02 %ige ätherische Lösung 3.3. Die physiologische Wirkung war nicht sehr groß, 1 γ war voll wirksam, 0.2 γ schien die Grenzdosis zu sein. Die Analyse ergab, daß das Produkt Sauerstoff aufgenommen hatte.

4.786 mg Sbst. (im Hochvakuum bei 100⁰ getrocknet):
9.350 mg CO_2, 3.07 mg H_2O

$C_{27}H_{42}O$ Ber. C 84.79 H 10.99
Gef. „ 81.40 „ 10.97.

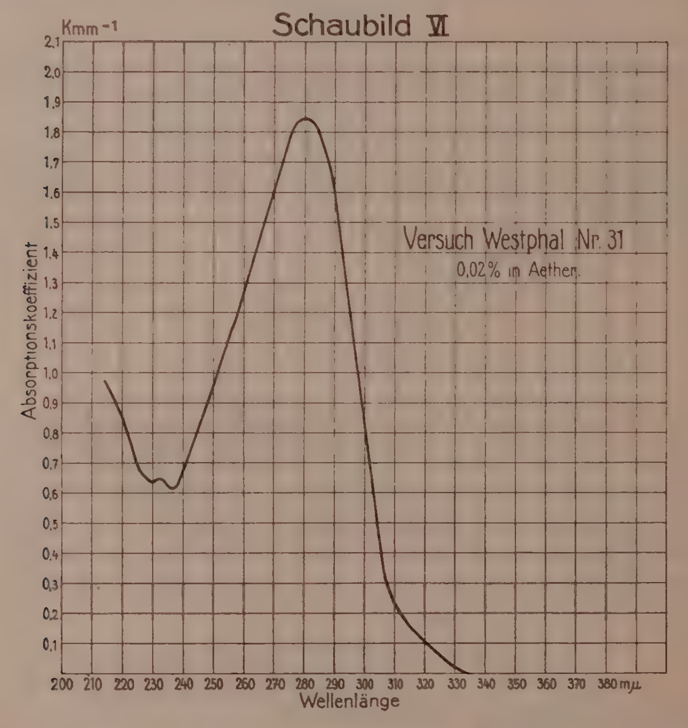
Daß der hohe Absorptionskoeffizient bei 280 mμ durch Oxydationsprodukte bedingt ist, halten wir für sehr wahrscheinlich.

Versuch Westphal No. 18.

Ein anderes Bestrahlungsprodukt, bei welchem eine Umwandlung von 25 % erfolgt war und das $[\alpha]_D = -26^0$ zeigte, gab bessere Zahlen:

4.657 mg Sbst.: 14.130 mg CO_2, 4.33 mg H_2O
$C_{27}H_{42}O$ Ber. C 84.79 H 10.99
Gef. „ 83.09 „ 10.45.

Dasselbe galt für zwei weitere Bestrahlungsprodukte, die durch fünfstündige Bestrahlung dargestellt waren (Versuch Westphal No. 30 und 31); sie lieferten 83.22, 83.21 % C und 11.40, 10.97 % H: also ebenfalls etwa 1½ % Kohlenstoff zu wenig. Das Absorptionsspektrum des ergosterinfreien Produktes aus Versuch 31 sei auf Schaubild VI wiedergegeben.



C. Einfluß des Luftsauerstoffs auf die Bestrahlungsprodukte.

Versuch Westphal No. 20.

2 g Ergosterin wurden in 0.57 %iger ätherischer Lösung 10′ bestrahlt. Umgewandelt wurden 20 %. Die Drehung des ergosterinfreien Bestrahlungsproduktes betrug für $[\alpha]_D = -33^0$. Der Absorptionskoeffizient für die 0.02 %ige Lösung betrug für 280 mμ 2.0. Die „Vitamin“lösung blieb an der Luft stehen und veränderte, Drehung, Spektrum und Wirksamkeit.

Dauer der Lufteinwirkung in Stunden	0	16^h	24^h	42^h	64^h	88^h	136^h	160^h	280^h
$[\alpha]_D$	-33^0	-38^0	-52^0	-52^0	-47^0	-34^0	-14^0	-7^0	-3^0
Absorptionskoeffizient für 280 m	2	1.7	1.2	0.9	0.8	0.6	0.5	0.5	0.4
Antirachitische Wirkung von 1 γ	+	+	+	+	+	+		?	—
von 0.2 γ		+	?	?	—				—

Während der Luftoxydation wurde das Spektrum zunächst nur im langwelligeren Teil (280 $m\mu$) abgebaut, im kurzwelligeren Teil (240—280 $m\mu$) erfolgte zunächst ein Aufbau und dann ebenfalls ein Abbau.

Versuch Linsert No. 16.

1.5 g Ergosterin wurden mit 350 ccm trocknem Petroläther $1^1/_2$ Stunden in der üblichen Weise bestrahlt. Umgewandelt waren 47 %, die Drehung des ergosterinfreien Bestrahlungsprodukts betrug für $[\alpha]_D = -32^0$. Es blieb in petrolätherischer Lösung in einer verkorkten Flasche stehen, ohne daß die Luft sorgfältig ferngehalten wurde.

Dauer der Lufteinwirkung in Tagen	0	9^d	13^d	17^d	19^d	21^d
$[\alpha]_D$	-32^0	-41^0	-50^0	-40^0	-22^0	-14^0

Nach weiterem Stehen schied sich aus der Lösung allmählich ein farbloses Harz ab.

D. Überbestrahlung des Ergosterins.

Versuch Westphal No. 23.

0.1 g Ergosterin in 0.029 %iger ätherischer Lösung wurden 8 Stunden unter den üblichen Bedingungen bestrahlt; umgewandelt waren 95 %, die Drehung betrug für $[\alpha]_D = +15^0$. Der Absorptionskoeffizient betrug bei 280 $m\mu$ 0.2 für eine 0.02 %ige ätherische Lösung. Das Präparat war zu 1 γ antirachitisch unwirksam.

Versuch Westphal No. 26.

0.05 g Ergosterin wurden in 0.015 %iger ätherischer Lösung sieben Stunden bestrahlt. Umgewandelt waren 95 %, $[\alpha]_D = -3.5^0$. Der Absorptionskoeffizient betrug für 280 $m\mu$ 0.2; das Präparat war zu 1 γ physiologisch inaktiv.

II. Bestrahlungen strömender Lösungen.

Während Herr Westphal unter Rückfluß siedende Lösungen bestrahlt hat, ist Herr v. Werder so vorgegangen, daß er verdünnte Ergosterinlösungen an der vertikal brennenden Quecksilberlampe von 3000 H. K. hat vorbeiströmen lassen [1]). Der Hauptvorteil dieser Anordnung besteht darin, daß sich die Bildung von Überbestrahlungsprodukten viel leichter vermeiden läßt, wenn die kurz bestrahlten Produkte alsbald der weiteren Bestrahlung entzogen werden. Während bei einer unter Rückfluß siedenden Lösung nach einer 96 %igen Umwandlung die Wirkung und die Ultraviolettabsorption bei 270—280 mμ fast verschwunden sind, sind Wirkung und charakteristische Absorption in einer fließenden Lösung nach 96 %iger Umwandlung und Entfernung des unveränderten Ergosterins noch sehr deutlich vorhanden. Das Vorbeiströmen der Lösung an der Lampe bietet also gegenüber der nur unter Rückfluß siedenden oder gar einer ruhenden Lösung bedeutende Vorteile, sie besitzt den Nachteil, daß unter den von uns gewählten Bedingungen der vollkommene Ausschluß der Luft schwierig ist.

A. Von den so durchgeführten Versuchen wollen wir eine kleine Auswahl anführen, geordnet nach der Bestrahlungsdauer pro 1 mg Ergosterin.

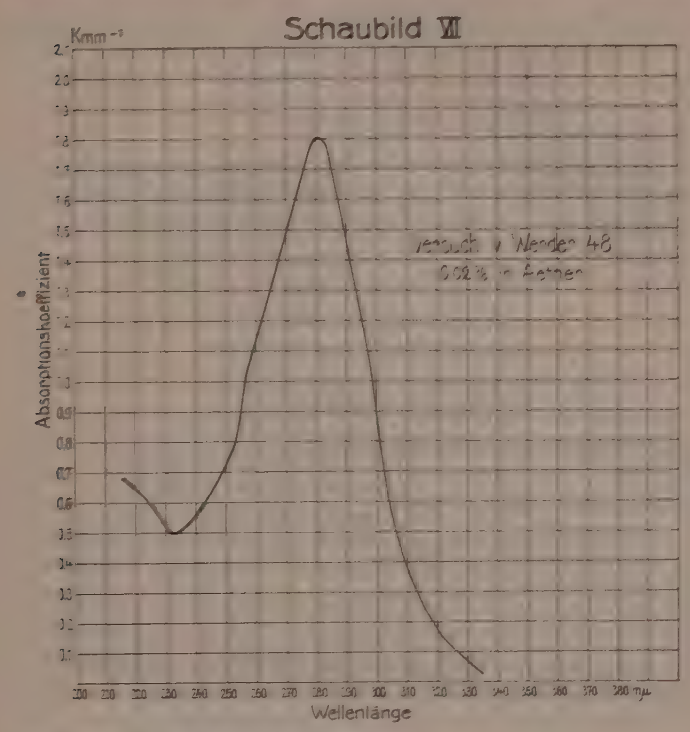
Versuch v. Werder No. 48.

2500 ccm einer 0.1 %igen, auf -10^0 abgekühlten Lösung von Ergosterin in Normal-Benzin wurden in $2^3/_4{}'$ an der Quecksilberlampe vorbeigeleitet, und zwar unter einem geringen Stickstoffüberdruck. Unter unseren Versuchsbedingungen war jedes mg Ergosterin 0.07″ der Bestrahlung ausgesetzt. Die Lösung wurde in der üblichen Weise verarbeitet, umgewandelt waren 20 %. Die Drehung des ergosterinfreien Materials betrug für $[\alpha]_D = -19^0$. Die Absorptionskurve ist in Schaubild VII wiedergegeben; Maximum bei 280 mμ, Absorptionskoeffizient einer 0.02 %igen ätherischen Lösung 1.8 für 280 mμ.

Zu unserer größten Überraschung erwies sich dieses Bestrahlungsprodukt in der Dosis von 0.1 γ als antirachitisch unwirksam. Dies muß nachgeprüft werden.

---

1) Schichtdicke des Quarzmantelgefäßes 1 cm, Entfernung von der Lampe 0.5 cm. (Hanauer Modell).



Versuch v. Werder No. 52.

Eine 0.1%ige Ergosterinlösung wurde ebenso bestrahlt, wie im vorigen Fall, nur betrug die Dauer der Bestrahlung 1.07″ pro 1 mg. Umwandlung 94%, Drehung $[\alpha]_D = -8.4^\circ$. Absorptionskoeffizient einer 0.02%igen Lösung für 280 mμ = 1.9. Das Produkt war bei 0.4 γ antirachitisch voll wirksam. Grenzdosis ca. 0.2 γ.

Versuch v. Werder No. 54.

Eine 0.1%ige Ergosterinlösung wurde 1.91″ pro 1 mg bestrahlt. Umwandlung 97%. $[\alpha]_D = -9.5^\circ$. Absorptionskoeffizient für 280 mμ = 1.6. Das Präparat war zu 0.5 γ voll wirksam. Grenzdosis nicht bestimmt.

Beim Stehen an der Luft veränderte sich die Drehung:

Zeitdauer der Lufteinwirkung in Tagen	0^d	4^d	8^d	12^d	16^d
$[\alpha]_D$	-9.5°	-19.4°	-6°	-2°	$+9$

Versuch v. Werder No. 55.

Eine 0.1% Lösung wurde 2.61″ pro 1 mg bestrahlt. Umwand-

lung ca. 98 %, $[\alpha]_D = -3^0$, Absorptionskoeffizient für 280 mμ = 1.6. Das Präparat war zu 0.5 γ wirksam, Grenzdosis nicht bestimmt.

Versuch v. Werder No. 41.

Überbestrahlung. Eine 0.1 %ige alkoholische Ergosterinlösung wurde 4.4″ pro 1 mg bestrahlt. Umwandlung praktisch vollständig $[\alpha]_D = +2.5^0$; Absorptionskoeffizient für 280 μm = 0.35. Das Präparat war zu 1 γ nicht wirksam.

B. Über die Allophansäureester einiger solcher Bestrahlungsprodukte.

Versuch v. Werder No. 44.

Ein mit der Quecksilberlampe gewonnenes Bestrahlungsprodukt (0.18″ für 1 mg, 67 % Umwandlung) wurde von unverändertem Ergosterin befreit und in kaltem Benzol gelöst; in die gekühlte Lösung wurde Cyansäuredampf eingeleitet, der in bekannter Weise durch thermische Zersetzung trockner Cyanursäure gewonnen war; die Lösung blieb dann 72 Stunden verschlossen stehen. Nach dieser Zeit wurde der abgeschiedene Niederschlag abgesaugt, mit Benzol extrahiert und die benzolische Lösung eingedampft. Sie schied beim Stehen Krystallrosetten aus, die in heißem Benzol löslich, in Äther und Petroläther fast unlöslich waren. Der Schmelzpunkt lag bei 196°.

	5.203 mg Sbst.:	13.415 mg CO_2,	4.23 mg H_2O
$C_{29}H_{44}O_3N_2$	Ber.	C 74.30	H 9.47
	Gef.	„ 70.32	„ 9.10

Wir haben dann 10 g eines technischen Bestrahlungsprodukts unter ähnlichen Bedingungen mit Cyansäure behandelt und weiter verarbeitet. Das Reaktionsprodukt ließ sich in drei Fraktionen zerlegen, eine erste, die in Pyridin löslich, in Benzol sehr schwer und in Äther fast unlöslich war, eine zweite, die sich außer in Pyridin auch in Benzol ziemlich gut löste, aber in Äther wenig löslich war und endlich eine dritte, die sich in allen drei Lösungsmitteln leicht löste.

Die zweite Fraktion wurde krystallisiert erhalten, sie schmolz bei 190° und gab zwar einen richtigen Stickstoffwert (6.07 %), aber 3.33 % Kohlenstoff zu wenig.

Aus der ersten Fraktion wurde ein bei 206° schmelzendes, krystallinisches Produkt erhalten, das sehr ähnliche Analysenzahlen lieferte.

4.838 mg Sbst.: 12.470 mg CO_2, 4.02 mg H_2O
2.760 mg Sbst.: 0.146 ccm N_2, (25°, 755 mm)

$C_{29}H_{44}O_3N_2$	Ber.	74.30	9.47	5.98
	Gef.	70.30	9.30	6.04.

Die drei Allophansäureester waren physiologisch unwirksam, sie lieferten bei der Verseifung ein harziges Material, das sich in der Dosis von 0.4 γ antirachitisch als wirksam erwies. Die Dosis von 0.1 γ wurde übereinstimmend in Darmstadt, Elberfeld und Göttingen als nicht mehr sicher wirksam befunden.

III. Über Bestrahlungen in hochevakuierten Quarz- oder Uviolrohren.

Wie schon erwähnt, ist das Ergosterin während der Bestrahlung sehr empfindlich gegen Sauerstoff; und auch nach der Bestrahlung sind die kurz bestrahlten, noch links drehenden Reaktionsprodukte ziemlich leicht durch den Luftsauerstoff angreifbar. Es ist darum, wenn man ein von Oxydationsprodukten freies Bestrahlungsprodukt erhalten will, notwendig, den Sauerstoff während der Bestrahlung und (für kurz bestrahlte Produkte) auch während der Aufarbeitung vollständig auszuschließen. Überbestrahlungsprodukte sind dagegen nachträglich kaum sauerstoffempfindlich. Die vollständige Fernhaltung des Sauerstoffs ist durchaus nicht leicht. In vielen Fällen, in denen wir glaubten, dies erreicht zu haben, hat uns die Analyse das Gegenteil bewiesen. Beispiele hierfür sind in den vorhergehenden Abschnitten angeführt.

Sichere Erfolge haben wir erst erzielt, als wir reines Ergosterin, in Dekalin oder Methyl-cyklohexan gelöst, in ein Quarz- oder Uviolrohr gebracht haben, dieses vier Stunden am Hochvakuum evakuiert und dann am Hochvakuum zugeschmolzen haben.

A. Auch bei langdauernder Bestrahlung solcher Rohre, die weder Sauerstoff noch Wasserdampf enthielten, blieb das Vakuum im Rohr erhalten; die Überbestrahlungsprodukte gaben richtige Analysenzahlen, sie enthielten noch die drei Doppelbindungen und die Hydroxylgruppen des Ergosterins.

Versuch Rygh.

1 g Ergosterin in 25 cm Methyl-cyklohexan wurde 24 Stunden mit der Quecksilberlampe bestrahlt; während der Bestrahlung wurde das Rohr lebhaft geschüttelt. Die Umwandlung betrug 97 %, $[\alpha_D] = +9.5^0$, das Produkt war nicht mehr sehr luftempfindlich.

5.144 mg Sbst.: 15.930 mg CO_2, 5.18 mg H_2O
$C_{27}H_{42}O$ Ber. C 84.75 H 11.07
Gef. „ 84.46 „ 11.27.

Ein ähnlich bereitetes Präparat von Frl. cand. chem. Stein, das zu 93 % umgewandelt war, gab bei der Analyse folgende Zahlen:

4.410 mg Sbst.: 13.690 mg CO_2, 4.58 mg H_2O
$C_{27}H_{42}O$ Ber. C 84.75 H 11.07
Gef. „ 84.70 „ 11.62.

Es liegen noch mehrere gut stimmende Analysen und Titrationen solcher Bestrahlungsprodukte vor. Die Titrationen mit Benzopersäure beweisen, daß auch in den lang bestrahlten Produkten noch drei Doppelbindungen vorhanden sind.

Versuch v. Werder No. 64.
2 g Ergosterin, in Dekalin gelöst, wurden im hochevakuierten Uviolrohr 30 Stunden mit der Quarzquecksilberlampe bestrahlt; die Umwandlung betrug 94 %. Das in der üblichen Weise aufgearbeitete Reaktionsprodukt addierte bei 0° pro Mol

nach Stunden	15h	23h	38h	46h
Atome Sauerstoff	3.09	3.11	3.12	3.12

Versuch Bock.
2 g Ergosterin wurden in einer rotierenden Uviolglasröhre in 9 cm Abstand von der Quarzquecksilberlampe 40 Stunden bestrahlt; die Umwandlung betrug fast 100 %. $[\alpha]_D = 0°$. Das Reaktionsprodukt addierte bei 0° pro Mol nach 48 Stunden 2.94 Atome Sauerstoff, nach 72 Stunden 2.94 Atome Sauerstoff.

Daß auch die Hydroxylgruppe im Bestrahlungsprodukt noch vorhanden ist, geht, wie wir schon veröffentlicht haben, aus der Bestimmung der Wasserstoffzahl nach Zerewitinoff hervor [1]). Ebenso beweisend ist auch die Bildung eines Allophansäureesters aus dem Bestrahlungsprodukt.

B. Bestrahlung von Ergosteryl-allophansäureester.

Unter unsern in hochevakuierten Rohren durchgeführten Bestrahlungen sind diejenigen, die wir unter den eben erwähnten Vorsichtsmaßregeln[2]) am Ergosteryl-allophansäureester vorgenommen

1) Windaus und Linsert, Liebigs Annalen, Bd. 465, S. 150 (1928).
2) Daß auch die Ester des Ergosterins, wenn sie ohne sehr sorgfältige

haben, am interessantesten, weil sie zu schön krystallisierten Reaktionsprodukten führen.

200 mg Ergosteryl-allophansäureester in Methyl-cyklohexan wurden in einem, am Hochvakuum mehrere Stunden evakuierten und dann zugeschmolzenen Uviolglasrohr $2^1/_2$ Stunden mit der Quecksilberbogenlampe unter starkem Schütteln bestrahlt. Nach dieser Zeit war der Allophansäureester in Lösung gegangen; das Rohr wurde unter reinem Äther geöffnet; es schieden sich Flocken ab, die sich leicht aus Alkohol umkrystallisieren ließen und dann in gut ausgebildeten Nädelchen von Schmp. 207° erhalten wurden. $[\alpha]_D = -2^0$. Ausbeute 38%.

4.690 mg Sbst. gaben 12.700 mg CO_2, 3.95 mg H_2O
2.845 mg Sbst.: 0.149 ccm N_2 (21°, 777 mm)

$C_{29}H_{44}N_2O_3$	Ber.	C 74.35	H 9.40	N 5.98
	Gef.	„ 73.85	„ 9.42	„ 6.21.

Das Verseifungsprodukt des krystall. Allophansäureesters war, wie der negative Ausfall der Digitoninprobe bewies, frei von Ergosterin. Es war zu 0.1 γ antirachitisch unwirksam. (Überbestrahlungsprodukt?)

C. Einwirkung von Natrium und Alkohol auf das Bestrahlungsprodukt des Ergosterins[1]).

2 g bestrahltes Ergosterin (Umwandlung 93%, $[\alpha]_D^{19} = -2.2^0$) wurden 3 Stunden mit Natrium und Alkohol hydriert. Das Reaktionsprodukt zeigte für $[\alpha]_D$ den Wert $+12.8^0$. 1 g wurde in 15 ccm trocknem Benzol gelöst, in die gekühlte Lösung wurde Cyansäuredampf eingeleitet. Nach dreitägigem Stehen bei etwa 0° wurde die benzolische Lösung eingedampft und der Rückstand in wenig Essigester aufgenommen. Hierbei schied sich ein Krystallbrei aus, der zunächst in Pyridin gelöst wurde; das mit Wasser aus der Pyridinlösung ausgefällte Material wurde dann wiederholt aus Äther-Petroläther umkrystallisiert und so in kleinen, aber gleichförmig aussehenden Nadeln vom Schmp. 177° erhalten. Die Ausbeute an reinem Allophansäureester betrug 0.15 g.

5.541 mg Sbst.: 14.990 mg CO_2, 4.74 mg H_2O.

$C_{29}H_{46}N_2O_3$	Ber.	C 74.04	H 9.79
	Gef.	„ 73.78	„ 9.57.

Fernhaltung der Luft bestrahlt werden, falsche Analysenzahlen geben, haben wir bereits früher hervorgehoben, Windaus und Rygh loc. cit.

1) Von Aluminiumamalgam werden die Bestrahlungsprodukte nicht verändert.

Die Analyse beweist also, daß es sich um den Allophansäureester eines isomeren Dihydroergosterins handelt.

Der Allophansäureester des gewöhnlichen, mit Digitonni fällbaren Dihydro-ergosterins ist viel schwerer löslich und schmilzt bei 246°.

Zusammenfassung.

1. Der Einfluß des Lösungsmittels auf die Aktivierung des Ergosterins ist gering, vorausgesetzt, daß das Lösungsmittel genügend ultraviolett-durchlässig ist.

2. Die Bestrahlung des Ergosterins führt nicht zu einem Gleichgewicht zwischen Ergosterin und seinen photochemischen Umwandlungsprodukten, sondern geht bis zum Verschwinden des Ergosterins weiter.

3. Für eine gleichmäßige Aktivierung des Ergosterins ist die Bewegung der Lösung während der Bestrahlung von Bedeutung.

4. Wenn bei langdauernder Bestrahlung des Ergosterins das Absorptionsband bei 270—280 mμ abgebaut ist und die ursprünglich negative Drehung für α_D positiv geworden ist, zeigt das Bestrahlungsprodukt keine antirachitische Wirkung mehr.

5. Bleibt das Bestrahlungsprodukt an der Luft stehen, nimmt die Absorption bei 280 mμ und die negative Drehung (ev. nach einem anfänglichen Anstieg ebenfalls ab und die physiologische Wirksamkeit der Präparate geht langsam zurück.

6. Wenn bei der Bestrahlung und Aufarbeitung der Sauerstoff ausgeschlossen wird, entstehen Isomere des Ergosterins, die ebenso wie das Ergosterin selbst, eine Hydroxylgruppe und drei Doppelbindungen enthalten. Wahrscheinlich erfolgen bei der photochemischen Umwandlung Verschiebungen von Doppelbindungen oder sterische Umlagerungen. Die photochemisch erzeugten Isomeren des Ergosterins liefern krystallisierte Allophansäureester, die richtige Analysenzahlen geben. Es existieren mindestens zwei Isomere, von denen das eine linksdrehende physiologisch aktiv, das andre rechtsdrehende, physiologisch inaktiv ist.

7. Beim Behandeln der Bestrahlungsprodukte mit Natrium und Äthylalkohol erhält man Dihydro-derivate, die ebenfalls Allophansäureester richtiger analytischer Zusammensetzung liefern.

Die vorliegende Untersuchung ist mit Unterstützung der Notgemeinschaft durchgeführt.

Wir danken der Firma E. Merck, Darmstadt und der I. G. Farbenindustrie-Aktiengesellschaft, Werk Elberfeld für das uns zur Verfügung gestellte Ergosterin und für die Ausführung physiologischer Prüfungen. — Ebenso sprechen wir unsern Dank aus Herrn Dr. Smakula, der im I. Physikal. Institut (Direktor Prof. Pohl) die Absorptionsspektren von mehr als hundert Bestrahlungsprodukten gemessen hat, und Herrn Dr. Holtz und Frl. E. Schreiber, die in der biochemischen Abteilung unseres Instituts mehr als hundert Substanzen auf antirachitische Wirkung untersucht haben.

Über allobiotische Wirkungen.

Von

Wolfgang Heubner.

Vorgelegt in der Sitzung am 11. Januar 1929.

Im Jahre 1922 suchte ich in einer Mitteilung über „Pathobiose" auf Grund von Betrachtungen über die Wirkungen des Lichtes, des Phosgens usw. eine gewisse Form von Veränderungen lebendiger Gebilde durch äußere Einwirkungen abzugrenzen [1]. Als charakteristisch für diese Form erschien mir das Eintreten eines von der „Norm" entschieden abweichenden Zustandes, der längere Zeit — auch nach Beseitigung des wirksamen Agens — keine Rückwandlung zur Norm und auch keine rasche Weiterverwandlung zum tötlichen Ausgang erkennen läßt. Später änderte ich die anfangs gewählte Bezeichnung um in „Allobiose", weil von Schoeller [2] die Meinung geäußert wurde, daß nicht nur schädliche, „pathologische" Effekte das erwähnte Charakteristikum aufweisen könnten, sondern auch „Reiz"-wirkungen, die vielfach als „günstig" für die betreffenden Lebewesen angesehen werden („Eubiose"). Obwohl die tatsächliche Existenz solcher Effekte nach den bisher bekannten Tatsachen nicht notwendigerweise anerkannt zu werden brauchte, mußte die Möglichkeit ihres Vorkommens in Betracht gezogen werden: das Wort „Allobiose" schien daher für eine Verwandlung in allgemeinerem Sinne besser geeignet zu sein [3]; inzwischen wurde der Terminus auch von anderen Autoren aufgenommen [4].

Schon in der ersten, oben angeführten Mitteilung wurde die Bedeutung der „allobiotischen" (pathobiotischen) Wirkungen für die Entwicklung chronischer Vergiftungen hervorgehoben. Nicht geringer aber dürfte ihre Bedeutung sein bei manchen Heil-

---

1) Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen, mathemat.-physikal. Kl. 1822, 96.

2) Naturwissenschaften 1922, 1078.

3) Verhandlungen der deutschen pharmakologischen Gesellschaft 4, Innsbruck 1924, S. II.

4) Vgl. Flury in Flury-Zanggers Lehrbuch der Toxikologie, Berlin, Julius Springer, 1928, S. 14.

wirkungen, soweit diese nämlich durch häufig wiederholten „kurmäßigen“ Gebrauch gewisser Agentien zu Stande kommen, die einzeln für sich vorübergehender Natur sind: denn auch hier ist nicht nur Zweck, sondern vor Allem auch Folge der vorgenommenen Prozeduren nicht eine stets wiederholte Erschütterung des bestehenden Zustandes, sondern die Überführung des bestehenden Zustandes in einen andersartigen und in dieser anderen Art dauernd beharrenden Zustandes des lebendigen Systems („Allobiose“). In solchen Fällen dürfte der Ausdruck „Eubiose“ mit gutem Recht gebraucht werden; bekannte Beispiele sind z. B. Badekuren bei rheumatischen Affektionen und ähnliches. Mit Vorliebe verwendet die klinische Medizin seit einiger Zeit den Ausdruck „Umstimmung“ für solche oft zu beobachtenden nachhaltigen Dauerwirkungen einzelner oder mehrfach wiederholter, an sich kurz dauernder Eingriffe in einen belebten (insonderheit erkrankten) Organismus.

Zwar nicht identisch mit dem Begriff der „allobiotischen Wirkung“, aber doch aus verwandten Erscheinungen abgeleitet ist der von Wiechowski[1]) mit Frau Langecker[2]) aufgestellte Begriff der „statotropen“, auch „statischen“ Wirkung, den sie der „dynamischen“ Wirkung vieler Arzneistoffe und Gifte entgegenstellen. Gemeint ist damit die Tatsache, daß nach Zufuhr dieser Stoffe neben einer Änderung der leicht erkennbaren, z. B. Nerven-, Muskel-, Drüsenfunktionen auch Änderungen des biologischen Zustandes (Status) eintreten, die oft erst bei besonderer Inanspruchnahme des Organismus erkennbar werden. Sie können die Anwesenheit des Giftes überdauern.

Bei den Dauerveränderungen durch chemische Stoffe, die dem Organismus einverleibt werden, ist selbstverständlich zunächst stets die Frage offen, ob die nachhaltigen Wirkungen deshalb auftreten, weil die zugeführten Stoffe selber sehr lange im Organismus verharren und daher ihre chemischen Kräfte lange Zeit zur Geltung bringen, oder ob die besondere Art ihrer Wirkung nachhaltige Veränderungen bestehen läßt, auch wenn die Substanzen den Körper restlos verlassen haben. Die Formulierung Wiechowskis legt auf diese Frage nicht den stärksten Nachdruck, sondern betont vor Allem die Existenz von Wirkungen, die oft nicht beachtet werden. Zweifellos ist dies die primäre und wichtigste Frage, während die Art der Beziehung zwischen Giftgegenwart und Dauerwirkung als sekundär betrachtet werden kann. Immerhin ist auch diese Frage für die Theorie der Dauerwirkungen aller Art nicht gleichgültig, um so mehr als der Fall nicht selten verwirklicht sein

1) Vgl. Starkenstein in Starkenstein-Pohl-Rosts Lehrbuch der Toxikologie, Berlin-Wien, Urban u. Schwarzenberg, 1929, S. 9.

2) Aepp. **118**, 49; 61 ff.; 98, 1926. Verhandlungen der d. pharmakol. Ges. **6**, Düsseldorf 1926, S. 65 (Aepp. **119**).

dürfte, daß ein langdauerndes Beharren einer wirksamen Substanz im Organismus mit einer Wirkungsweise kombiniert ist, die an sich — auch nach Verschwinden des Giftes — eine Dauerveränderung des Organismus zurückläßt. Da einmal nicht daran gezweifelt werden kann, daß es echte allobiotische Wirkungen gibt, muß die wissenschaftliche Analyse der pharmakologischen Dauerwirkungen dieses Moment in Rücksicht ziehen.

Im einzelnen Fall, sofern es sich nicht um ganz ausgesuchte Beispiele handelt, ist es oft äußerst schwer, zu einem endgültigen Urteil darüber zu kommen, ob und in welchem Ausmaß eine allobiotische Wirkung im Spiele ist. Im Laufe des letzten Jahres habe ich gemeinsam mit den Herren Drs. Grabbe und Nahme Versuche über Substanzen vorgenommen, deren therapeutische Anwendung bei Mensch und Tier eine Wirkungsweise wahrscheinlich machte, die in der Richtung einer „Statotropie“, „Umstimmung“ lag, also a priori auch eine allobiotische Komponente enthalten konnte: o-Oxychinolin und Jodoxychinolinsulfosäure, die in Mischung mit anorganischen, nur technisch bedeutsamen Salzen unter den Namen „Chinosol“ und „Yatren“ als Arzneimittel vertrieben werden. Für das Oxychinolin war überdies in früheren Versuchen unseres Instituts ermittelt worden, daß es die anaerobe Glykolyse zuckergenährter Brennereihefe in geringerer Konzentration schädigte als den Sauerstoffverbrauch der gleichen Kulturen unter aeroben Bedingungen, während die meisten anderen Gifte, darunter das dem Oxychinolin ziemlich nah verwandte Phenol, umgekehrt zuerst die Atmung hemmen[1]. Auch diese Beobachtung ließ ein weiteres Studium der Substanz lohnend erscheinen.

Die beiden genannten Chinolinderivate wurden auf ihre Wirkung in Stoffwechselversuchen geprüft und zwar an Hunden im Stickstoffgleichgewicht und im Hunger unter Analyse des Tagesharns auf Stickstoff. Es zeigte sich für Oxychinolin die Eigentümlichkeit, daß eine Wirkung im Laufe des ersten, meist der beiden ersten Tage an der Menge des Harnstickstoffs nicht zu erkennen war, so daß der erste Versuch sogar als resultatlos vorzeitig abgebrochen wurde. Wurde jedoch längere Zeit abgewartet, so trat mit großer Regelmäßigkeit — gewöhnlich am dritten Tage — eine Änderung in der vorher gleichmäßig verlaufenden Ausscheidung von Harnstickstoff ein, meist zuerst ein Anstieg, seltener ein Abfall; ihm folgten in den nächsten Tagen weitere Unregelmäßigkeiten, im Allgemeinen ein Auf und Ab der täglichen Aus-

---

1) Vgl. Rolf Meier, Biochem. Z. **174**, 384, 1926. — Aepp. **122**, 129, 1927.

scheidungswerte, die bei Stickstoffgleichgewicht erst allmählich wieder zu der normalen Gleichförmigkeit zurückkehrten, im Hungerversuch zu einem wesentlich verfrühten „prämortalen Stickstoffverlust“ überleiteten. Im Ganzen war die Einwirkung im Hungerversuch beträchtlich intensiver als bei Fütterung. Freilich wurde auch ermittelt, daß die Ausscheidung des zugeführten Oxychinolins im Hunger sehr viel länger hinausgezögert war als bei Fütterung: eine nach längerem Hunger einsetzende erneute Fütterung beförderte unerwartet große Mengen von Oxychinolin in den Harn, das zu Beginn der Hungerperiode zugeführt und im Harn vor der erneuten Futterperiode kaum oder gar nicht mehr zu finden gewesen war. Somit waren es die Versuche im Stickstoffgleichgewicht, bei denen die Erscheinung sinnfälliger hervortrat, daß die Wirkung erst dann recht deutlich wurde, als bei Weitem der Hauptteil des zugeführten Giftes den Organismus schon wieder verlassen hatte. Immerhin mußte die Erfahrung bei den Hungertieren etwas bedenklich stimmen, ob die Wirkung tatsächlich als eine echte allobiotische Nachwirkung anzusehen oder den letzten noch im Körper vorhandenen Resten des Giftes zu verdanken sei. Bemerkenswert bleibt in jedem Fall die Verzögerung des Eintritts einer Wirkung weit über die Zeit des im Körper erreichten Maximums der Giftkonzentration hinaus.

Vergleichsversuche mit der schon längst als Stoffwechselgift bekannten Salizylsäure ergaben denn auch, daß bei unseren Versuchstieren ebenso wie bei denen früherer Untersucher ein Stoffwechselanstieg sogleich am ersten Tage nach der Zufuhr festzustellen war. Doch fand sich auch bei ihr eine viel nachhaltigere Wirkung am Hungertier: statt eines kurzen vorübergehenden Anstiegs der Stickstoffausscheidung steigerte sich diese noch in den folgenden Tagen und machte bis zu dem auch hier verfrüht einsetzenden prämortalen Anstieg überhaupt keiner Senkung zur Norm wieder Platz.

Ähnlich protrahierte Wirkungen am Hungertier hatten übrigens B. Rosenthal und W. Lipschitz[1]) bei dem Chininderivat Vuzin (im Gegensatz zu Chinin, Hydrochinin, Optochin und Eucupin) beobachtet.

Die Jodoxychinolinsulfosäure erwies sich bei innerlichen Gaben an gesunden gefütterten Hunden meist als wirkungslos im Stoffwechsel; im Hunger war die Wirkung der des Oxychinolins ähnlich, doch (im gleichen Dosenbereich) schwächer. Bei intravenöser Injektion trat am zweiten Tage vorübergehend eine Vermehrung

1) Aepp. 116, 39; 54, 1926.

des ausgeschiedenen Stickstoffs auf und zwar im Gleichgewichtsversuch (am Hungertier stehen entsprechende Versuche noch aus).

Die genannte Substanz bietet in chemischer Hinsicht nach zwei Richtungen besonderes Interesse gegenüber dem Oxychinolin: einmal gibt ihr Jodgehalt die Möglichkeit, ihre Ausscheidung noch in kleineren Mengen analytisch zu verfolgen; zweitens ist die Substanz als Sulfosäure primär ein Elektrolyt, während das Oxychinolin erst durch Veresterung innerhalb des Körpers in einen solchen verwandelt wird. Um so merkwürdiger erscheint das Verhalten der Substanz bei der Ausscheidung aus dem Organismus. Sowohl bei innerlicher wie bei endovenöser Zufuhr werden beträchtliche Mengen im Kot ausgeschieden. Im Harn sind rasch abfallende Mengen über eine Reihe von Tagen nachzuweisen. Während des Hungers kann die Hauptmenge der zugeführten Substanz mehrere Wochen im Körper verharren, um erst bei erneuter Fütterung im Harn zu erscheinen. Die Substanz bietet also ein Beispiel langdauernden Verweilens im Organismus nach einmaliger Dosis und mahnt somit zur Vorsicht gegenüber der Schlußfolgerung auf eine „allobiotische“ Wirkung.

Es sei angemerkt, daß schon Renner[1]) bei einer leicht nachweisbaren Substanz von Elektrolytcharakter, der pulegonschwefligen Säure, eine unerwartet lange anhaltende Ausscheidung ermittelt hatte.

Die sehr erheblichen Unterschiede der Ausscheidung körperfremder Substanzen bei Fütterung oder Hunger und die vielleicht damit verknüpften intensiveren Wirkungen von Stoffwechselgiften im Hunger erlauben einen Ausblick auf Unterschiede analoger Art zwischen gesunden und kranken Geweben. Es sind Anhaltspunkte dafür vorhanden, daß die letztgenannten für „statische“ Wirkungen besonders empfindlich sind. Weitere Untersuchungen müssen lehren, ob sie ebenso, wie hungernde Gewebe, die in Frage kommenden Gifte länger festhalten. Die bisherigen Befunde erlauben noch kein abschließendes Urteil darüber, wie weit bei den Stoffwechselwirkungen des Oxychinolins und der Jodoxychinolinsulfosäure eigentliche allobiotische, also von der Gegenwart des Giftes nicht unmittelbar abhängige Vorgänge mit im Spiele sind.

---

1) Aepp. 85, 227, 1919.

Über die Picard-Landauschen Sätze.

Von

Oskar Perron, München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Mai 1929.

Einem Beweis des (ersten oder zweiten) Picardschen Satzes erkennt man gewöhnlich dann und nur dann das Prädikat „elementar" zu, wenn er ohne elliptische Modulfunktion oder vielmehr deren Umkehrfunktion operiert. Aber die elementaren Beweise sind meist sehr schwerfällig; erst in allerjüngster Zeit ist Herrn Landau für den ersten Picardschen Satz ein Beweis geglückt, der an Einfachheit des Gedankenganges dem ursprünglichen heute genau 50 Jahre alten nichtelementaren Beweis von Picard wenigstens einigermaßen nahe kommt[1]). Dadurch wird die Frage nahe gelegt, ob sich nicht vielleicht der ursprüngliche Beweis „elementarisieren" läßt. Man gelangt heute zur inversen Modulfunktion entweder von den elliptischen Funktionen oder von den linearen Differentialgleichungen oder von der Theorie der konformen Abbildungen her; aber wie man es auch macht, immer muß man recht weit in der betreffenden allgemeinen Theorie vorgedrungen sein, ehe man über alle nötigen Kenntnisse verfügt. Ich will im Folgenden zeigen, wie man, ohne von den genannten Theorien etwas zu wissen, sich ad hoc auf einfachste Weise das nötige Rüstzeug verschaffen kann, und zwar betrachte ich statt der inversen Modulfunktion gleich eine allgemeinere Funktion mit wesentlich denselben Eigenschaften. Dabei werden nur die Grundbegriffe der Funktionentheorie gebraucht: Komplexes Integral und analytische Fortsetzung. So ergeben sich Beweise der Picard-Landauschen Sätze, die man wohl auch als elementar wird bezeichnen dürfen[2]).

---

1) E. Landau, Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante. Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften 1926.

2) In ähnlicher Weise hat schon Herr de la Vallée Poussin einen mit dem Picardschen Satz verwandten Montelschen Satz bewiesen. Vergl. seine Arbeit: Démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Montel sur les familles normales de fonctions. Annals of mathematics (2) 17 (1915), S. 5—11.

§ 1. Die Funktion $\Phi_\alpha(x)$.

Ist α eine Zahl zwischen 0 und 1, so sieht man leicht, daß das Integral

$$(1)\qquad F_\alpha(x) = \int_0^\infty u^{-\alpha}(u+1)^{-\alpha}(u+x)^{\alpha-1}\,du$$

in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen x-Ebene einschließlich der beiden Schnittufer, d. h. im Bereich

$$(2)\qquad x = re^{i\varphi} \quad (0 < r < \infty,\ -\pi \leqq \varphi \leqq \pi)$$

regulär ist und speziell für positive x positive Werte annimmt. Die Regularität in den Uferpunkten des Schnittes erkennt man in bekannter Weise durch eine kleine Deformation des Integrationswegs.

Für einen konstanten Wert $x = re^{i\varphi}$ des Bereiches (2) und ein positives u ist

$$u + x = |u+x|\,e^{i\vartheta\varphi},$$
$$(u+x)^{\alpha-1} = |u+x|^{\alpha-1}\,e^{i\vartheta\varphi(\alpha-1)}, \quad \text{wo } 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Mindestens für genügend großes u ist sogar gewiß $\vartheta < 1$ und folglich ist auch

$$(3)\qquad F_\alpha(x) = Re^{i\Theta\varphi(\alpha-1)} \qquad (R > 0,\ 0 \leqq \Theta < 1).$$

Die Funktion $F_\alpha(1-x)$ ist entsprechend in der längs der positiven Achse von 1 bis ∞ aufgeschnittenen Ebene einschließlich der beiden Schnittufer regulär. Von jetzt an sei die Ebene längs beider Schnitte aufgeschnitten. Für einen Punkt $x = re^{i\varphi}$ ist dann

$$1 - x = r_1 e^{i\varphi_1},$$

wobei φ_1 das entgegengesetzte Vorzeichen von φ hat und

$$|\varphi| + |\varphi_1| \leqq \pi$$

ist. Analog zu (3) hat man

$$(3\text{a})\qquad F_\alpha(1-x) = R_1 e^{i\Theta_1\varphi_1(\alpha-1)} \qquad (R_1 > 0,\ 0 \leqq \Theta_1 < 1).$$

Daher ist die Funktion

$$(4)\qquad \Phi_\alpha(x) = \frac{F_\alpha(x)}{F_\alpha(1-x)}$$

in der aufgeschnittenen Ebene einschließlich der vier Schnittufer regulär. Nach (3) und (3a) ist

$$(5)\qquad \Phi_\alpha(x) = \frac{R}{R_1}\,e^{i(\Theta\varphi - \Theta_1\varphi_1)(\alpha-1)}.$$

Wenn wir von jetzt an $\alpha \geqq \frac{1}{2}$ annehmen [1]), so ist

$$|(\Theta\varphi - \Theta_1\varphi_1)(\alpha-1)| \leqq (|\varphi| + |\varphi_1|)\tfrac{1}{2} \leqq \frac{\pi}{2},$$

wo offenbar nicht beidemal Gleichheit gelten kann, und aus (5) folgt, daß die Funktion $\Phi_\alpha(x)$ in der aufgeschnittenen x-Ebene stets einen positiven Realteil hat. Da ferner, wenn x das Intervall (0, 1) wachsend durchläuft, $F_\alpha(x)$ offenbar abnimmt und $F_\alpha(1-x)$ zunimmt, so nimmt $\Phi_\alpha(x)$ ab und folglich ist $\Phi_\alpha(x)$ keine Konstante.

Nunmehr wollen wir die Funktion $\Phi_\alpha(x)$ über die Schnitte hinaus analytisch fortsetzen. Für die gegenüber liegenden Uferpunkte $x = re^{\pm i\pi}$ ist

$$(u+x)^{\alpha-1} = \begin{cases} (r-u)^{\alpha-1} e^{\pm i\pi(\alpha-1)} & \text{für } u < r \\ (u-r)^{\alpha-1} & \text{für } u > r, \end{cases}$$

und folglich

$$F_\alpha(re^{\pm i\pi}) = e^{\pm i\pi(\alpha-1)}\int_0^r u^{-\alpha}(u+1)^{-\alpha}(r-u)^{\alpha-1}\,du + \int_r^\infty u^{-\alpha}(u+1)^{-\alpha}(u-r)^{\alpha-1}\,du.$$

Daher durch Subtraktion

$$F_\alpha(re^{i\pi}) - F_\alpha(re^{-i\pi}) = -2i\sin\pi\alpha\cdot\int_0^r u^{-\alpha}(u+1)^{-\alpha}(r-u)^{\alpha-1}\,du,$$

oder wenn man $u = \dfrac{rv}{v+1+r}$ setzt,

$$F_\alpha(re^{i\pi}) - F_\alpha(re^{-i\pi}) = -2i\sin\pi\alpha\cdot\int_0^\infty v^{-\alpha}(v+1)^{-\alpha}(v+1+r)^{\alpha-1}\,dv$$
$$= -2i\sin\pi\alpha\cdot F_\alpha(1+r).$$

Indem man durch $F_\alpha(1+r) = F_\alpha(1-re^{\pm i\pi})$ dividiert, erhält man:

(6) $$\Phi_\alpha(re^{i\pi}) - \Phi_\alpha(re^{-i\pi}) = -2i\sin\pi\alpha.$$

Nach (4) ist $\Phi_\alpha(x) = \dfrac{1}{\Phi_\alpha(1-x)}$, so daß aus (6) weiter folgt:

(7) $$\frac{1}{\Phi_\alpha(1-re^{i\pi})} - \frac{1}{\Phi_\alpha(1-re^{-i\pi})} = -2i\sin\pi\alpha.$$

---

1) Übrigens ist, was wir aber nicht brauchen, $F_\alpha(x) = F_{1-\alpha}(x)$. Man erkennt das für positives x, indem man in Formel (1) $u = \frac{x}{v}$ setzt, und dann für beliebiges x durch analytische Fortsetzung.

Die Formel (6) zeigt, wie sich die Funktion $\Phi_\alpha(x)$ bei Überschreiten des Schnittes $(0, -\infty)$, also beim Umlaufen des Nullpunktes ändert; Formel (7) zeigt, wie sie sich beim Überschreiten des Schnittes $(1, \infty)$, also beim Umlaufen des Punktes 1 ändert. Beide Formeln zusammen lehren, daß sich die Funktion $\Phi_\alpha(x)$ auf jedem die Punkte 0, 1 vermeidenden Weg analytisch fortsetzen läßt, und wenn man etwa einen geschlossenen Weg wählt, der zuerst n_0-mal den Punkt 0, dann n_1-mal den Punkt 1, dann n_2-mal den Punkt 0 usw., schließlich n_{2k-1}-mal den Punkt 1 umläuft[1]), so geht $\Phi_\alpha(x)$ über in den Kettenbruch

$$(8)\qquad n_0\gamma + \frac{1|}{|n_1\gamma} + \cdots + \frac{1|}{|n_{2k-1}\gamma} + \frac{1|}{|\Phi_\alpha(x)}, \text{ wobei } \gamma = -2i\sin\pi\alpha.$$

Nun hat, wie wir sahen, $\Phi_\alpha(x)$ und folglich auch $\frac{1}{\Phi_\alpha(x)}$ vor Überschreitung eines Schnittes einen positiven Realteil. Da γ rein imaginär ist, findet man der Reihe nach, daß auch

$$n_{2k-1}\gamma + \frac{1|}{|\Phi_\alpha(x)},$$

$$n_{2k-2}\gamma + \frac{1|}{|n_{2k-1}\gamma} + \frac{1|}{|\Phi_\alpha(x)},$$

. . . .

und schließlich der ganze Kettenbruch (8) einen positiven Realteil hat. Daher hat die Funktion $\Phi_\alpha(x)$, wie weit man sie auch analytisch fortsetzen mag, stets einen positiven Realteil.

§ 2. Der erste (kleine) Picardsche Satz.

$f(z)$ sei eine ganze Funktion, die die Werte 0 und 1 ausläßt; dann wird behauptet, daß $f(z)$ eine Konstante ist.

Beweis. Jedem Weg der z-Ebene entspricht vermittels der Funktion $x = f(z)$ ein die Punkte 0 und 1 vermeidender Weg der x-Ebene. Die Funktion $\Phi_\alpha(f(z))$ läßt sich also auf jedem Weg der z-Ebene analytisch fortsetzen; sie hat daher im Endlichen keinen singulären Punkt, und ist folglich eine ganze Funktion. Da sie aber stets einen positiven Realteil hat, kann sie auch im

---

1) n_ν kann positiv oder negativ sein, n_0 und n_{2k-1} auch null. Ein negatives n_ν bedeutet natürlich einen $|n_\nu|$-maligen Umlauf in negativer Richtung. Zwei Umläufe in entgegengesetzter Richtung um einen der beiden Punkte, ohne daß inzwischen der andere umlaufen wird, zählen zusammen natürlich als kein Umlauf.

Unendlichen weder eine polare noch eine wesentliche Singularität haben; sie ist also eine Konstante. Da aber $\Phi_\alpha(x)$ keine Konstante ist, muß $f(z)$ selbst konstant sein.

§ 3. Der zweite (große) Picardsche Satz.

$f(z)$ sei für $0 < |z| < R$ eindeutig, regulär und von 0 und 1 verschieden. Dann wird behauptet, daß der Nullpunkt keine wesentlich singuläre Stelle sein kann.

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an und bilden wieder die Funktion $\Phi_\alpha(f(z)) = \Psi(z)$, die stets einen positiven Realteil hat, also nie null ist. Wenn z eine geschlossene Linie um den Nullpunkt beschreibt, so beschreibt $x = f(z)$ eine geschlossene Linie in der x-Ebene, die aber vielleicht die Schnitte überschreitet. Daher geht $\Psi(z)$ nach (8) über in

$$\Omega(z) = n_0\gamma + \frac{1|}{|n_1\gamma} + \cdots + \frac{1|}{|n_{2k-1}\gamma} + \frac{1|}{|\Psi(z)}, \tag{9}$$

wo k und die n_ν ganze Zahlen sind. Wenn man den geschlossenen Weg stetig deformiert, müssen diese ganzen Zahlen natürlich dieselben bleiben, so daß die Gleichung (9) für variables z gilt. Wir zeigen zunächst, daß $k = 1$, $n_0 = n_1 = 0$, also $\Omega(z) = \Psi(z)$ ist. Andernfalls ist nämlich für ein gewisses $\zeta : \Omega(\zeta) \neq \Psi(\zeta)$. Setzt man dann

$$\frac{|\Omega(\zeta) - \Psi(\zeta)|}{|\Omega(\zeta)| + |\Psi(\zeta)|} = \frac{2}{K}, \tag{10}$$

so ist $K \geqq 2$. Da der Nullpunkt für $f(z)$ wesentlich singulär sein soll, kann man ein absolut beliebig kleines z_0 so angeben, daß $|f(z_0) - f(\zeta)|$ beliebig klein und infolgedessen etwa

$$\frac{|\Omega(z_0) - \Psi(z_0)|}{|\Omega(z_0)| + |\Psi(z_0)|} > \frac{1}{K} \tag{11}$$

ist. Wenn $|z_0|$ genügend klein, ist $|z_0 e^{2\pi i y}|$ für $|y| \leqq K$ kleiner als R. Folglich ist, wenn $\Psi(z_0) = a + bi$ gesetzt wird, die Funktion

$$H(y) = \frac{K}{y}\,\frac{\Psi(z_0 e^{2\pi i y}) - (a + bi)}{\Psi(z_0 e^{2\pi i y}) - (-a + bi)} \tag{12}$$

für $|y| \leqq K$ regulär; außerdem ist sie für $|y| = K$ absolut kleiner als 1, weil ja $\Psi(z_0 e^{2\pi i y})$ stets einen positiven Realteil hat, also näher bei $a + bi$ als bei $-a + bi$ liegt (a ist ja als Realteil von

$\Psi(z_0)$ positiv). Daher kann $H(y)$ auch für $|y| < K$ nie größer als 1 sein. Speziell ist also $|H(1)| \leqq 1$ oder, was dasselbe sagt:

$$K \left| \frac{\Omega(z_0) - (a+bi)}{\Omega(z_0) - (-a+bi)} \right| \leqq 1.$$

Also erst recht, da $a + bi = \Psi(z_0)$ ist,

$$K \frac{|\Omega(z_0)| - |\Psi(z_0)|}{|\Omega(z_0)| + |\Psi(z_0)|} \leqq 1.$$

im Widerspruch mit (11). Hiernach muß in der Tat $\Omega(z) = \Psi(z)$ sein, was besagt, daß die Funktion $\Psi(z)$, wenn z den Nullpunkt umläuft, eindeutig bleibt. Da sie aber nur Werte mit positivem Realteil annimmt, kann sie am Nullpunkt nicht singulär sein. Setzt man demgemäß etwa $\Psi(0) = c$, so ist für ein beliebig kleines ε und ein hinreichend kleines $|z|$

$$|\Phi_\alpha(f(z)) - c| = |\Psi(z) - c| < \varepsilon.$$

Da aber $f(z)$ in der Nähe des wesentlich singulär vorausgesetzten Nullpunktes jedem Wert beliebig nahe kommen muß und die Funktion $\Phi_\alpha(x)$ keine Konstante ist, enthält diese Ungleichung einen Widerspruch.

§ 4. Der Landausche Satz.

Die Potenzreihe $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ sei für $|z| \leqq R$ regulär und von 0 und 1 verschieden. Dann wird behauptet, daß

$$(13) \qquad |a_1 \Phi'_\alpha(a_0)| R \leqq 2 \Re(\Phi_\alpha(a_0))$$

ist, wo durch $\Re$ der Realteil bezeichnet ist.

Die Formel (13) enthält bereits den Landauschen Satz, sobald feststeht, daß $\Phi'_\alpha(a_0)$ wenigstens für ein gewisses (eventuell von a_0 abhängiges) α von 0 verschieden ist. Zum Beweis der Formel bilden wir wieder die Funktion $\Phi_\alpha(f(z))$, die diesmal für $|z| \leqq R$ regulär ist und einen positiven Realteil hat. Setzt man $\Phi_\alpha(f(0)) = a + bi$, so ist die Funktion

$$H_1(z) = \frac{R}{z} \frac{\Phi_\alpha(f(z)) - (a+bi)}{\Phi_\alpha(f(z)) - (-a+bi)}$$

für $|z| \leqq R$ regulär und für $|z| = R$ absolut kleiner als 1 (Begründung wie bei (12)). Daher kann $|H_1(z)|$ auch für $|z| < R$ nie größer als 1 sein, so daß man erhält:

$$\left| \frac{\Phi_\alpha(f(z)) - (a+bi)}{\Phi_\alpha(f(z)) - (-a+bi)} \right| \leqq \frac{|z|}{R} \qquad \text{für } |z| \leqq R.$$

Nun ist aber

$$\Phi_\alpha(f(z)) = \Phi_\alpha(a_0 + a_1 z + \cdots) = \Phi_\alpha(a_0) + \Phi'_\alpha(a_0)\, a_1 z + \cdots$$

und $\Phi_\alpha(a_0) = a + b i$, so daß die vorige Ungleichung übergeht in

$$\left| \frac{\Phi'_\alpha(a_0)\, a_1 z + \cdots}{2a + \Phi'_\alpha(a_0)\, a_1 z + \cdots} \right| \leqq \frac{|z|}{R},$$

und wenn man durch $|z|$ dividiert und dann z nach 0 wandern läßt,

$$\frac{|\Phi'_\alpha(a_0)\, a_1|}{2a} \leqq \frac{1}{R}.$$

Da aber $a = \Re(\Phi_\alpha(a_0))$ ist, so ist das bereits die zu beweisende Ungleichung (13).

Nun muß noch gezeigt werden, daß $\Phi'_\alpha(a_0) \neq 0$ wenigstens für ein gewisses α. Aus (4) folgt durch Differentiation

$$(14) \qquad \Phi'_\alpha(x) = \frac{F_\alpha(1-x)\, F'_\alpha(x) + F_\alpha(x)\, F'_\alpha(1-x)}{F_\alpha(1-x)^2},$$

und wir müssen zeigen, daß der Zähler für ein geeignetes α von 0 verschieden ist. Aus (1) folgt durch partielle Integration:

$$(1-\alpha)\, F_\alpha(x) = \int_0^\infty (u+1)^{-\alpha} (u+x)^{\alpha-1}\, d(u^{1-\alpha})$$

$$= -\int_0^\infty u^{1-\alpha} [-\alpha(u+1)^{-\alpha-1}(u+x)^{\alpha-1} + (\alpha-1)(u+1)^{-\alpha}(u+x)^{\alpha-2}]\, du.$$

und hieraus leicht:

$$(15) \qquad \lim_{\alpha \to 1} (1-\alpha)\, F_\alpha(x) = \int_0^\infty (u+1)^{-2}\, du = 1.$$

Weiter folgt aus (1) durch Differentiation nach x und partielle Integration:

$$F'_\alpha(x) = (\alpha-1) \int_0^\infty u^{-\alpha} (u+1)^{-\alpha} (u+x)^{\alpha-2}\, du$$

$$= -\int_0^\infty (u+1)^{-\alpha} (u+x)^{\alpha-2}\, d(u^{1-\alpha})$$

$$= \int_0^\infty u^{1-\alpha} [-\alpha(u+1)^{-\alpha-1}(u+x)^{\alpha-2} + (\alpha-2)(u+1)^{-\alpha}(u+x)^{\alpha-3}]\, du$$

und hieraus wieder:

$$(16) \quad \lim_{\alpha \to 1} F'_\alpha(x) = \int_0^\infty [-(u+1)^{-2}(u+x)^{-1} - (u+1)^{-1}(u+x)^{-2}]\, du = -\frac{1}{x}.$$

Aus (15) und (16) folgt sofort

$$\lim_{\alpha \to 1} (1-\alpha)[F_\alpha(1-x) F'_\alpha(x) + F_\alpha(x) F'_\alpha(1-x)] = -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x(1-x)},$$

so daß der Zähler in (14) wirklich für geeignetes α von 0 verschieden ist.

§ 5. Schlußbemerkung.

In Wahrheit ist der Zähler in (14), also auch $\Phi'_\alpha(x)$, nicht nur für geeignetes α, sondern für jedes α (natürlich $0 < \alpha < 1$, vgl. den Beginn des § 1) von 0 verschieden. Es gilt nämlich die Formel

$$(17) \qquad F_\alpha(1-x) F'_\alpha(x) + F_\alpha(x) F'_\alpha(1-x) = -\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{1}{x(1-x)},$$

deren Beweis mir aber nicht mit so einfachen Mitteln gelungen ist, wie ich sie durchweg hier verwende. Die Ungleichung (13) besagt dann, wenn noch $a_1 \neq 0$ ist (für $a_1 = 0$ ist sie trivial):

$$(18) \qquad R \leqq \frac{2\Re(\Phi_\alpha(a_0))}{|a_1 \Phi'_\alpha(a_0)|} \qquad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

In dieser Formel darf $\Phi_\alpha(a_0)$ ein beliebiger Zweig der Funktion Φ_α sein, also ein Wert, der nach beliebigem Überschreiten der Schnitte erreicht wird; denn ihre Herleitung setzt darüber nichts voraus. Man kann die Formel aber nicht etwa durch geeignete Wahl des Zweiges günstiger gestalten; vielmehr läßt sich aus (6) und (7) leicht erkennen, daß die rechte Seite von (18) für alle Zweige gleich ist. Wohl aber kann man die Formel (18) durch geeignete Wahl von α möglichst günstig gestalten. Die rechte Seite hat nämlich ihr Minimum für $\alpha = \frac{1}{2}$ und zwar stellt sie dann, wie Herr Carathéodory zuerst bewiesen hat, bereits den genauen Landauschen Radius dar[1]). Um das zu erkennen, muß man allerdings über die durch die Funktion $\Phi_{\frac{1}{2}}(x)$ vermittelte konforme Abbildung orientiert sein, was aus dem elementaren Rahmen dieser Arbeit herausfällt. Gerade in Bezug auf die konforme Abbildung hat die Funktion $\Phi_{\frac{1}{2}}(x)$ vor den andern $\Phi_\alpha(x)$ allerhand voraus. Die Funktion $i\Phi_{\frac{1}{2}}(x)$ ist die in der Einleitung erwähnte Inverse der elliptischen Modulfunktion.

---

1) C. Carathéodory, Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. Comptes rendus 141 (1905), S. 1213—1215.

Über die ersten ultravioletten Eigenfrequenzen einiger einfacher Kristalle.

Von

R. Hilsch und **R. W. Pohl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1929.

Zwischen dem Brechungsindex n, der Absorptionskonstante K und dem Reflexionsvermögen R einer Substanz besteht ein jedem Physiker geläufiger Zusammenhang: K und R erreichen (nahezu) bei der gleichen Wellenlänge ihr Maximum. Der Brechungsindex n durchsetzt diese „Absorptionsbande“ mit dem charakteristischen Kurvenzug der anomalen Dispersion. Im Prinzip lassen sich alle drei Größen benutzen, um die optischen Energiestufen einer Substanz festzustellen. Für Atome und Moleküle in Dampfform ist auf diese Weise schon eine Unzahl wichtiger Energiestufen festgelegt worden und ihre innere Verknüpfung im Sinne bestimmter Atom- und Molekülmodelle macht ständig große Fortschritte.

Mit Gasen und Dämpfen verglichen, wissen wir jedoch über die Energiestufen fester Körper, also von Kristallen, noch außerordentlich wenig. Einen durchschlagenden Erfolg hatten nur Rubens und seine Mitarbeiter zu verzeichnen: die Entdeckung der Energiestufen im langwelligen Ultrarot, der bekannten Reststrahlen [1]). Mit Hilfe von Reflexionsmethoden sind diese Reststrahlen heute für eine ganze Reihe der wichtigsten, einfachen Kristalle, insbesondere für etliche Alkalihalogenide recht genau bekannt. Sie liegen zwischen etwa 50 μ und 100 μ. Von den Reststrahlen beginnend und zu kurzen Wellenlängen fortschreitend, findet man bei den genannten einfachen Kristallen keine weiteren Energiestufen. Die Absorption bleibt bis durch das sichtbare Gebiet hindurch unmeßbar klein. Reflexionsvermögen und Brechungsindex zeigen einen ganz allmählichen kontinuierlichen Anstieg. Erst in der ersten Oktave des

1) Gute Zusammenstellung: H. Rubens, Sitzungsberichte der preuß. Akad. d. Wiss. 1915, Seite 4, Tabelle I.

Ultravioletten beginnt der Brechungsindex rascher zu steigen, ein Anzeichen, daß wir uns dem Gebiete der ultravioletten Eigenfrequenzen dieser einfachen Kristalle nähern. Wir verweisen auf die sehr übersichtliche Zusammenstellung der Dispersionskurven von Gyulai [1]).

Man hat seit Jahrzehnten versucht, aus dem spektralen Verlaufe des Brechungsindex die experimentell noch nicht erreichbaren ultravioletten Eigenfrequenzen zu berechnen. Wir haben diesen Versuchen stets mit großer Skepsis gegenüber gestanden und zwar aus zwei Gründen. Erstens schien uns der glatte, schwach gekrümmte Verlauf der Dispersionskurven viel zu wenig charakteristische Züge zu enthalten, um nicht bei der Wahl der Konstanten weiten Spielraum zu lassen. Zweitens waren Gudden und wir durch unsere Versuche über lichtelektrische Leitung immer wieder zu der Auffassung gelangt, daß die Energiestufen im Ultravioletten eng gehäuft und einander überlagernd ein praktisch kontinuierliches, weit ins Schumanngebiet reichendes Band bilden. Dieses unser Vorurteil ließen wir erst fallen, als uns der enge Zusammenhang von lichtelektrischer Leitung und Phosphoreszenz zur Auffindung der Alkalihalogenidphosphore führte. Die Dissertationen von Hilsch [2]) und Smakula [3]) zeigten mit Deutlichkeit, daß einfach gebaute Kristalle sehr wohl auch im Ultravioletten scharfe und gut voneinander getrennte Energiestufen aufweisen können. Bei den genannten Phosphoren waren den Alkalihalogenidkristallen im Schmelzfluß winzige Mengen von Tl, Pb und anderen Fremdionen beigefügt worden. War es möglich, die im Ultravioletten gefundenen scharfen Energiestufen den Tl Cl, Pb Cl_2 usw., wenn auch modifiziert durch die fremde Gitterumgebung, zuzuschreiben? In diesem Sinne angesetzte Versuche waren recht erfolgreich. Für Tl Cl, Pb Cl_2 und etliche andere Kristalle konnten wir direkt mit lichtelektrischer Photometrie die ersten ultravioletten Energiestufen in Absorption ausmessen [4]). Die dazu erforderlichen Kristallschichten genügender Dicke waren durch Pressen des Schmelzflusses zwischen amorphen Quarzplatten gewonnen worden. Die Übereinstimmung der im Tl Cl, Pb Cl_2 usw. gemessenen Absorptionsstreifen mit denen der zugehörigen Phosphore war wenigstens für die ersten, d. h. langwelligen, Absorptionsstreifen sehr befriedigend. Die schärfste Bande

1) J. Gyulai, Zs. f. Phys. **46**, 80, 1927.
2) R. Hilsch, Zs. f. Phys. **44**, 860, 1927.
3) A. Smakula, ebenda **45**, 1, 1927.
4) R. Hilsch und R. W. Pohl, Zs. f. Phys. **48**, 384, 1928.

erhielten wir am Pb Cl_2. Aber gerade dessen Gitter ist noch unbekannt.

Im Verfolg dieser Untersuchungen haben wir nunmehr die Absorption der einfachsten Ionengitter, nämlich die der Alkalihalogenide in Angriff genommen. Nach der Dispersionskurve versprachen die Jodide in dem noch in Luft zugänglichem Spektralgebiet am ehesten Aussicht auf Erfolg, wenngleich wir schon vor Jahresfrist KJ vergeblich untersucht hatten. Damals hatte Smakula KJ in einer Konzentration von 1 % in ein K Cl-Gitter eingebaut[1]). Das war nach einer inzwischen gefundenen Dimensionalbetrachtung unzulässig. Wir mußten KJ notwendigerweise genau so wie Tl Cl, Pb Cl_2 usw. in dünnen, zwischen Quarzplatten gepreßten Schichten durchmessen. Das gelang in der Tat. Abb. 1 links gibt das Ergebnis mit einer wohl ausgebildeten Energiestufe bei 219 mμ. Wie wir bereits früher mitgeteilt haben, genügen die gepreßten Schichten nur sehr bescheidenen Anforderungen an konstante Dicke. Dieser Nachteil führt zu einer Verflachung der gemessenen Absorptionskurven.

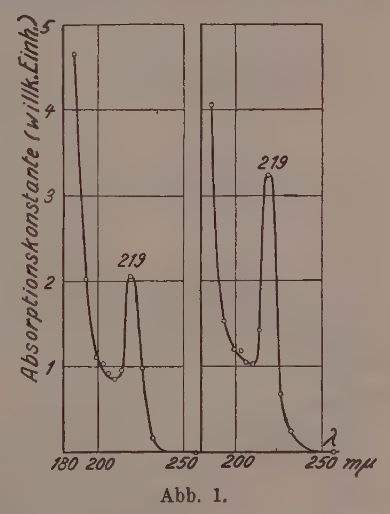


Abb. 1.

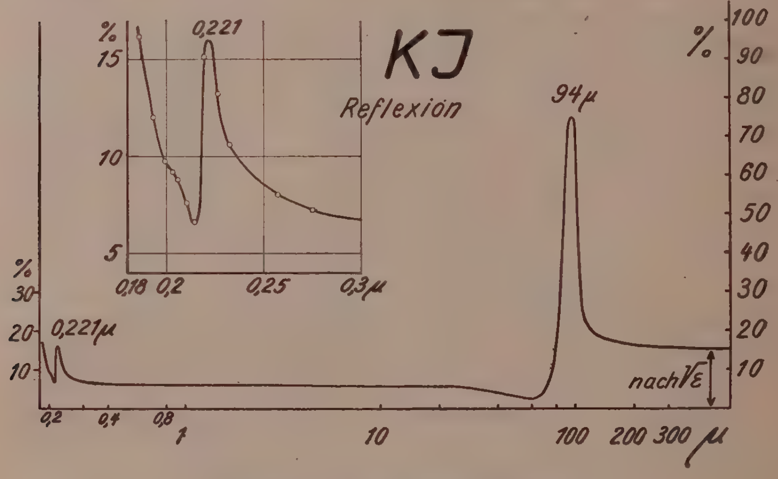
Inzwischen haben wir aber, zum Problem der lichtelektrischen Leitung unserer Kristalle zurückkehrend, ein viel besseres Verfahren gefunden, dünnste Kristallschichten mit einwandfreier Oberfläche und frei von inneren Trübungen herzustellen. Das betreffende Salz wurde im Hochvakuum in einem Wolframschiffchen verdampft und auf ein leicht gekühltes Quarzfenster niedergeschlagen. Dabei wurde die Hälfte des Fensters durch geeignete Abdeckung freigelassen. Diese dünnsten Schichten mußte man im Vakuum belassen und auch im Vakuum untersuchen, an Luft werden wenigstens die hygroskopischen augenblicklich trübe. Sie sind kaum sichtbar. Man erkennt sie nur bei geeigneter Beleuchtung an ihrer starken Reflexion.

Abb. 1 rechts zeigt das Meßergebnis an einer derartigen, durch Verdampfung gewonnenen Kristallschicht. Wir haben dies Ergebnis an verschiedenen Schichten reproduzieren können.

1) Lic. cit. Fig. 5.

Dies selektive Absorptionsmaximum mußte sich auch im Verlauf der Reflexionskurve bemerkbar machen. Wir haben diese Reflexionsmessungen mit nahezu senkrechter Inzidenz mit lichtelektrischer Photometrie durchgeführt. Es wurde ein großer KJ-Kristall mit der Reflexion eines Na Cl-Kristalles verglichen. Der KJ und der Na Cl-Kristall wurden mit enger Fuge zusammengesetzt, geschliffen und gemeinsam poliert. Die Reflexion des im Meßbereich noch völlig durchsichtigen Na Cl wurde nach der Fresnelschen Formel berechnet.

Das Mittelstück der Abb. 2 zeigt das Ergebnis: eine scharf selektive Reflexion mit einem Maximum bei 221 mμ. Der gering-



Wellenlänge in logarithmischem Maßstab

Abb. 2.

fügige Unterschied zwischen dem in Absorption und dem in Reflexion beobachteten Maximum muß vorhanden sein, da die Reflexion nicht nur von der Absorptionskonstanten sondern auch vom Brechungsindex abhängt.

Die Reflexion erreicht im Maximum einen Wert von 16 %. Dieser Wert wird sich wahrscheinlich in Zukunft durch eine Verbesserung der Politur noch ein wenig erhöhen lassen. Denn die von uns ge-

---

1) Unter wesentlicher Unterstützung durch Herrn cand. phys. Bauer haben wir das Verfahren zur Herstellung großer Kristalle, das wir Herrn Dr. Kyropulos verdanken, inzwischen sehr vervollkommnen können. Wir können von der Mehrzahl der Alkalihalogenide Einkristallwürfel von zirca 10 cm Kantenlänge herstellen. Herr Bauer wird die technischen Kunstgriffe in seiner Dissertation beschreiben.

messene Reflexion liegt im Durchlässigkeitsgebiet oberhalb 250 mμ noch merklich tiefer, als man nach der FRESNELschen Formel aus den von GYULAI gemessenen Brechungsindices berechnet. Doch haben wir diesen Punkt zunächst als unerheblich zurückgestellt. Denn die Bestimmung einer Energiestufe durch Absorption ist ja sicher besser, als eine solche durch Reflexion.

Doch bietet auch die Reflexionskurve ein gewisses Interesse. Sie gestattet eine direkte Verbindung mit den alten RUBENSschen Reststrahlmessungen an KJ. RUBENS hat von 20 μ bis 300 μ gemessen. Von 0,6—0,3 μ haben wir die Reflexion nach den n-Werten von GYULAI berechnet. Von 250—185 mμ erstrecken sich unsere direkten Reflexionsmessungen. Das Gebiet von 0,6—20 μ ist wohl mit völliger Sicherheit als absorptionsfrei zu betrachten. Überdies wird der Dispersionsverlauf jetzt von Herrn cand. phys. GUNDELACH in dem genannten Spektralgebiet an einem großen KJ-Prisma durchgemessen.

Das Ionengitter eines KJ-Kristalles hat also im ganzen Spektralgebiet von 0,2—200 μ und von dort weiter bis ins Gebiet der elektrischen Wellen nur zwei Energiestufen, die Reststrahlen und die neue Bande bei 0,219 μ.

Selbstverständlich sind wir hier nicht stehengeblieben. Wir haben die Messungen bereits für LiJ, NaJ, RbJ und CsJ mit sehr ähnlichen Ergebnissen fertig gestellt. Wir haben auch schon bei RbJ und CsJ eine zweite ultraviolette Energiestufe, deren steiler Einsatz beim KJ unterhalb von 190 mμ zu sehen ist. Messungen an Bromiden und Chloriden sind im Gange. Doch möchten wir diese Dinge erst in einem späteren Zusammenhang bringen, nachdem wir endlich die Verknüpfung von lichtelektrischer Leitung und photographischem Elementarprozeß klargestellt haben.

Nachdem nun die ersten ultravioletten Energiestufen der einfachen Kristalle derartig scharfe, der direkten Ausmessung durch Absorption zugängliche Energiestufen ergeben haben, ist die Frage nach der Zuordnung dieser Energiestufen nicht länger hinauszuschieben. In dieser Richtung versprechen wir uns viel von einer Dimensionalbetrachtung, die uns schon einigemal experimentell nützliche Fingerzeige gegeben hat [2]). Es scheinen sich einfache Zusammen-

---

1) Insbesondere versuchen wir die Arbeit von A. H. PFUND (Phys. Rev. 32, 39, 1928) nachzuprüfen, gegen die wir einstweilen noch erhebliche experimentelle Bedenken haben.

2) Der experimentelle Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß Lichtabsorption in der ersten ultravioletten Energiestufe zu einer „Fremdfärbung erster Art“ führt (Ausscheidung freien Alkalimetalls im Sinne des photographischen Elementar-

hänge mit den Energiestufen zu ergeben, die Franck und seine Mitarbeiter bei Molekülen in Dampfform gefunden haben. Schon heute möchten wir Herrn Franck für manchen nützlichen Hinweis danken.

Zusammenfassung: Es wird die erste ultraviolette Energiestufe des KJ sowohl in Absorption wie in Reflexion bestimmt. Abb. 2 gibt den Anschluß der Reflexionsmessungen an die Rubensschen Reststrahlmessungen.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität.

---

prozesses). Aus diesem Befund haben wir im Gegensatz zu Herzfeld und Wolf (Ann. Phys. 78, 35, 1925) für die langwelligste Energiestufe folgenden Elementarakt angenommen: den Übergang eines Elektrons vom Halogenion zum Alkaiion unter Aufwendung der Elektronenaffinität E, einer Arbeitsleistung gegen die Anziehungskräfte des Gitters Q (Coulombscher Anteil der Gitterenergie, s. Herzfeld und Wolf) und der Gewinnung der Ionisierungsarbeit des Alkaliatoms. So ergibt sich für KJ eine Wellenlänge von 214 mμ in bemerkenswerter Uebereinstimmung mit dem Experiment.

Zur Bestimmung der Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe.

Von

O. Heckmann und **H. Siedentopf**
in Göttingen.

Vorgelegt von M. Born in der Sitzung am 14. Juni 1929.

Einleitung.

Zur Bestimmung der Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe hat man zwei prinzipiell verschiedene Wege. Die eine Möglichkeit (I) besteht darin, daß man auf irgend eine Weise direkt die Sonnenscheibe ausphotometriert. Bei dieser Methode liegt die Hauptschwierigkeit im Einfluß der Luftunruhe (Szintillation), welche den gemessenen Helligkeitsverlauf namentlich in der Nähe des Randes verfälscht, worauf schon von verschiedenen Seiten hingewiesen worden ist. Die andere Möglichkeit (II) besteht darin, daß man bei totalen (oder unter gewissen Einschränkungen auch bei partiellen und ringförmigen) Sonnenfinsternissen die Gesamthelligkeit des unverfinsterten Teiles der Sonne als Funktion des Abstandes der Mittelpunkte von Sonne und Mond mißt. Die experimentellen Hauptschwierigkeiten sind in diesem Falle erstens die Überbrückung eines Intensitätsverhältnisses $10^6 : 1$, zweitens die korrekte Berücksichtigung der Extinktionsänderung während der Beobachtungsdauer. Dazu tritt als formale Schwierigkeit die Auflösung der Integralgleichung, die die beobachtete Helligkeit mit der Helligkeitsverteilung auf der Sonne verbindet. Diese Schwierigkeiten verschwinden alle, sobald man nur die Phasen der Finsternis in unmittelbarer Umgebung der Totalität behandelt und sich damit auf die Ermittlung der Randverdunkelung in der Nähe des Sonnenrandes beschränkt.

Man bekommt also bei Beobachtung von Finsternissen gerade jenen Teil der gesuchten Funktion am besten, den die direkte Beobachtung am unsichersten liefert, so daß beide Methoden sich ergänzen.

I. Über die Bestimmung der Helligkeitsverteilung durch direkte Messung.

Bei allen Methoden zur Bestimmung der Randverdunkelung außerhalb von Finsternissen wirkt die Luftunruhe so, daß sie das Argument der gesuchten Funktion mit zufälligen Fehlern behaftet. Mißt man bei mitbewegtem Fernrohr in einem noch so kleinen Gebiete der Sonnenscheibe die dort herrschende Helligkeit, so bekommt man nur einen Mittelwert, erstens wegen der unvermeidlichen Endlichkeit der Blende, zweitens, da infolge der Luftunruhe auch noch benachbarte Gebiete zu der gemessenen Helligkeit beitragen. Wollte man den Einfluß der Luftunruhe vermeiden, indem man, etwa auf photographischem Wege, die Beobachtungsdauer an der betrachteten Stelle klein macht gegenüber der mittleren Szintillationsdauer, so wüßte man nicht genau, bei welcher Stelle des Sonnenradius man gemessen hat, da die im Augenblick der Messung natürlich immer vorhandene Verzerrung des Bildes unbekannt bleibt. Die gleiche Schwierigkeit tritt auf, wenn man mit Hilfe einer Registriervorrichtung die Helligkeitsabnahme längs eines Sonnendurchmessers verfolgt. Hier tritt die Notwendigkeit auf, Mittelbildungen aus mehreren Meßreihen vorzunehmen, wobei dann wieder der anfangs geschilderte Sachverhalt vorliegt. Auch wenn man versuchen wollte, durch eine geeignete Meßvorrichtung die Helligkeitsdifferenz zweier dicht benachbarten Stellen der Sonnenscheibe, also den Gradienten der Helligkeit zu messen, bliebe der Einfluß der Luftunruhe bestehen. Man muß also versuchen, die Beobachtungen nachträglich rechnerisch zu verbessern, was durchaus möglich ist, wenn die entsprechenden Daten verfügbar sind.

Es sei $f(r)$ die gesuchte Helligkeit

$S(r)$ die scheinbare, durch Luftunruhe beeinflußte Helligkeit (beide bezogen auf die unendlich klein gedachte Flächeneinheit in der Entfernung r vom Mittelpunkt der Sonne)

σ die mittlere Schwankung des Bildes infolge der Luftunruhe, die als unabhängig von r angesehen werden darf. Nimmt man an, daß die einzelnen Schwankungen dem Fehlergesetz gehorchen, so gilt:

(1) $$S(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r+y)\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

Wirklich beobachtet wird aber erst der Mittelwert $b(r)$ von $S(r)$ in einem kleinen endlichen Gebiet, das von der Apparatur abhängt und das wir als kreisförmig mit dem Radius a annehmen

wollen. Dann gilt

$$(2) \qquad b(r) = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^{+a} S(r+x) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx.$$

Man hat also für $f(r)$ die Integralgleichung

$$(3) \quad b(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma a^3} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(r+x+y)\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

Man erhält die Lösung von (3), indem man zunächst $f(r+x+y)$ nach Potenzen von x und y entwickelt und die auftretenden Integrale ausführt. Dabei erhält man für $b(r)$ eine Reihe, die nach den geraden Ableitungen von $f(r)$ fortschreitet. Durch schrittweise Differentiationen und Substitutionen erhält man die Umkehrung dieser Reihe in der Form

$$(4) \quad f(r) = b(r) - \left[\frac{a}{8} + \frac{\sigma^2}{2}\right] b''(r) + \left[\frac{a^2}{64} - \frac{a^3}{192} + \frac{\sigma^2 a}{16} + \frac{\sigma^4}{8}\right] b^{IV}(r) - + \cdots$$

Die Lösung ist für die praktische Verwendung gut geeignet, so lange σ und a nicht zu groß werden. In den Veröffentlichungen der Sternwarte Göttingen Nr. 7 liegen Messungen von Juška vor, die wir als Beispiel verwenden wollen. Allerdings sind von Juška keine gleichzeitigen Szintillationsmessungen angestellt worden, so daß wir für σ willkürlich zwei Werte angenommen haben, von welchen wir den einen für plausibel hielten, während der andere das Höchstmaß der überhaupt zulässigen mittleren Schwankung gibt. Wir haben die Rechnungen nur für die Randgebiete der Sonne durchgeführt von $R - r = 0$ bis $R - r = 5$, wenn der Radius der Sonne $R = 100$ gesetzt wird.

Unsere Annahmen über σ bestanden darin, daß wir setzten

$$1) \quad \frac{a}{8} + \frac{\sigma^2}{2} = 1.0$$

$$2) \quad \frac{a}{8} + \frac{\sigma^2}{2} = 2.0.$$

Da bei Juška $a = 0.4$ war, so sind die Annahmen über σ, welche die Summe der durch die Szintillation und durch die Ausmessung der Registrierkurven bedingten Unsicherheiten umfassen:

$$1) \quad \sigma = \pm 1.38$$

$$2) \quad \sigma = \pm 1.97.$$

Die Messungen reichen übrigens zur Berechnung von $b^{IV}(r)$ nicht aus, was insofern in unserem Falle belanglos ist, als b^{IV} sicher sehr klein ist. Da überhaupt nur fünf gemessene Werte in dem

betrachteten Intervall liegen, so mußten wir den Verlauf von $b(r)$ graphisch konstruieren und numerisch glätten. Die folgende Figur 1 zeigt die Resultate.

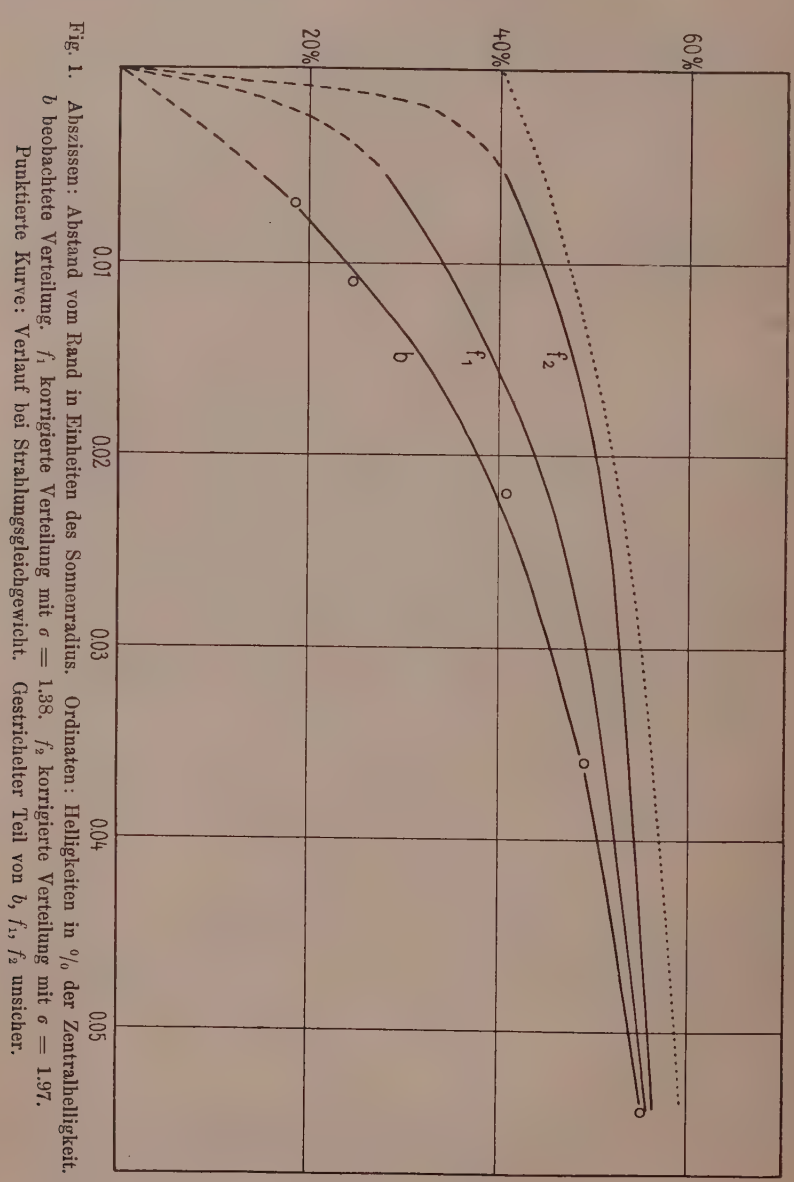


Fig. 1. Abszissen: Abstand vom Rand in Einheiten des Sonnenradius. Ordinaten: Helligkeiten in % der Zentralhelligkeit. b beobachtete Verteilung. f_1 korrigierte Verteilung mit $\sigma = 1.38$. f_2 korrigierte Verteilung mit $\sigma = 1.97$. Punktierte Kurve: Verlauf bei Strahlungsgleichgewicht. Gestrichelter Teil von b, f_1, f_2 unsicher.

Bei unserer Unkenntnis der genauen Größe von σ können wir nur die qualitative Folgerung ziehen, daß der plötzliche Abfall der Helligkeit erst unmittelbar am Sonnenrande einsetzt. Ob die Abweichung von der Form der theoretischen Verteilung reell ist oder nur auf Fehlern der Apparatur beruht, läßt sich nicht entscheiden. Jedenfalls sieht man, daß das geschilderte Verfahren die Meßresultate wesentlich verbessert. Wenn man bei künftigen Beobachtungen mit den eigentlichen Messungen der Helligkeitsverteilung sorgfältige Szintillationsbeobachtungen verbindet, um über die Größe von σ Aufschluß zu erhalten, wird man der gesuchten wahren Verteilung sicherlich näher kommen.

II. Über die Bestimmung der Helligkeitsverteilung durch Finsternisbeobachtungen.

Julius[1]), der diese Methode zuerst vorgeschlagen hat, behandelte die Aufgabe graphisch-numerisch mit geringer Genauigkeit. Minnaert[2]) beschränkte sich auf die äußerste Randzone und ging auch da den indirekten Weg, durch Versuche diejenige Randverdunklung zu ermitteln, die mit den Beobachtungen im Einklang stand. Ähnlich ist das Verfahren von Harzer, der neuerdings eine unser Problem betreffende Ergänzung[3]) zu seinen Untersuchungen über die Berücksichtigung der Randverdunklung bei Verfinsterungsveränderlichen[4]) gegeben hat. Er setzt für die Helligkeitsabnahme eine dreikonstantige Formel an und schlägt vor, die Konstanten durch Vergleich mit den Beobachtungen mit Hilfe einer Ausgleichung zu bestimmen. Doch ist die von Harzer gewählte Form zur Erfassung der physikalisch wichtigen Randzone nicht geeignet. Wenn es auch möglich wäre, durch einen anderen speziellen Ansatz die Helligkeit in den Randgebieten darzustellen (was im Prinzip wieder auf das Minnaertsche Verfahren hinausliefe), so ist doch die direkte, voraussetzungsfreie Lösung des Problems, d. h. den Verlauf der gesuchten Funktion zu ermitteln ohne besondere Annahmen über ihre analytische Form, bei weitem vorzuziehen. Wir müssen dabei totale und ringförmige Finsternisse getrennt behandeln.

A. Totale Sonnenfinsternis. In der Figur 2 seien S und M die Mittelpunkte von Sonne und Mond. SM bezeichnen wir mit

1) ApJ **37**, 225 (1913).
2) MN **89**, 197 (1928).
3) AN **235**, 305 (1929).
4) Publ. d. Sternw. Kiel XVI (1927).

$\varDelta$. Der Radius der Sonne sei 1, der des Mondes m. P sei der Punkt, in welchem ein Kreisring vom Radius r und der Breite dr den Mondrand trifft. Der Winkel PSM sei $180^\circ - \varphi$. φ hängt von r und $\varDelta$ ab. $f(r)$ sei die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe, $h(\varDelta)$ die (beobachtete) Gesamthelligkeit des unverfinsterten Teiles der Sonne, c eine von der Wahl der Helligkeitseinheiten abhängige Konstante. Wir wollen uns ausdrücklich auf die Behandlung des Problems im Intervall $m - 1 \leqq \varDelta < m$ beschränken (d. h. wir betrachten nur jene Phase der Finsternis vor der Totalität, bei der der Mondrand den Mittelpunkt der Sonne bereits überschritten hat). Diese Einschränkung ist insofern nicht wesentlich, als diese Phase die Randverdunklung mit größerer Genauigkeit liefert als die vorhergehenden. Dann ist

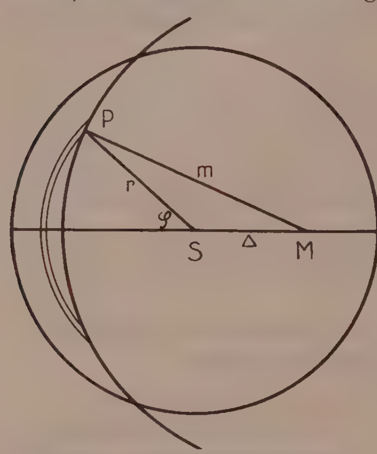


Fig. 2. Totale Sonnenfinsternis.

$$h(\varDelta) = 2c \int_{m-\varDelta}^{1} r f(r) \arccos \frac{m^2 - r^2 - \varDelta^2}{2r\varDelta}\, dr. \tag{5}$$

Dabei sind $h(\varDelta)$ und $f(r)$ in beliebigen Einheiten gemessen; in den gleichen Einheiten gilt

$$I = c\pi f(0) \frac{\bar{f}}{f(0)},$$

wo I die Gesamthelligkeit der Sonnenscheibe, $f(0)$ die zentrale, $\bar{f}$ die mittlere Flächenhelligkeit ist. Durch Division in (5) folgt

$$\frac{h(\varDelta)}{I} = \frac{2}{\pi} \frac{f(0)}{\bar{f}} \int_{m-\varDelta}^{1} r \frac{f(r)}{f(0)} \arccos \frac{m^2 - r^2 - \varDelta^2}{2r\varDelta}\, dr. \tag{5'}$$

Da man $h(\varDelta)$ in Einheiten von I, $f(r)$ in Einheiten von $f(0)$ zu messen pflegt, enthält diese Gleichung direkt die gemessenen Größen. Das Verhältnis $\frac{f(0)}{\bar{f}}$ variiert mit der Wellenlänge; man findet es tabuliert im Handbuch der Astrophysik Band IV, S. 17

Unsere Aufgabe besteht also darin, die durch Gleichung (5) definierte Funktion $f(r)$ zu bestimmen. Strenge Lösungen von (5) sind nur durch relativ komplizierte Methoden der schrittweisen

Näherung zu erhalten (vgl. VOLTERRA, Leçons sur les Equations Integrales etc., pg. 98 ff.). Wir haben auf ihre Durchführung verzichtet und uns weiterhin darauf beschränkt, eine nur die letzten Phasen der Finsternis vor und die ersten Phasen nach der Totalität erfassende Methode zu entwickeln, welche für das Problem die wesentlichen sind. Zu diesem Zwecke führen wir statt m und r ein die Größen

(6) $$\varrho = 1 - r, \quad \mu = m - 1,$$

denn μ ist klein gegen 1, ebenso ϱ und Δ, solange wir uns auf die Betrachtung der Randzone beschränken. In den neuen Variablen nimmt der Kern von (5) die Form an

$$\varphi(r, \Delta) = \Gamma(\varrho, \Delta) = \arccos \frac{\mu^2 - \varrho^2 + 2(\mu + \varrho) - \Delta^2}{2\Delta(1-\varrho)}$$
$$= \arccos \left\{ \frac{\mu + \varrho}{\Delta} - \frac{\Delta^2 - (\mu+\varrho)^2}{2\Delta(1-\varrho)} \right\}.$$

Entwickelt man $\Gamma(\varrho, \Delta)$ nach Potenzen des zweiten Bruches in der Klammer, der klein ist gegenüber dem ersten Bruch, so ergibt sich

(7) $$\Gamma(\varrho, \Delta) = \arccos \frac{\mu+\varrho}{\Delta} + \frac{\Delta}{2(1-\varrho)} \left[1 - \left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{2^2(1-\varrho)^2} \left[1 - \left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{1}{6} \frac{\Delta^3}{2^3(1-\varrho)^3} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \right\} - + \cdots$$

Wenn es genügte, $\Gamma(\varrho, \Delta)$ durch das erste Glied

$$\gamma(\varrho, \Delta) = \arccos \frac{\mu+\varrho}{\Delta}$$

der Entwicklung zu ersetzen, so wäre damit das Problem praktisch gelöst, denn die Integralgleichung

(8) $$h(\Delta) = 2c \int_0^{\mu-\Delta} (1-\varrho) f(1-\varrho) \arccos \frac{\mu+\varrho}{\Delta}\, d\varrho$$

läßt sich durch Differentiation nach Δ auf die ABELsche Form bringen, die man leicht umkehren kann. Nun zeigt aber die Abschätzung des zweiten Gliedes der Reihenentwicklung (7), daß die Ersetzung von Γ durch γ mit einer Genauigkeit von 1 % nur für $\Delta < 0.02$ möglich ist. Das reicht im allgemeinen nicht aus. Die drei ersten Glieder der Entwicklung stellen Γ mit der gleichen

Genauigkeit dar für alle $\varDelta < 0.7$; doch ist damit zunächst nichts gewonnen, da durch ihre Mitnahme die Abelsche Form der Integralgleichung zerstört wird. Dagegen bliebe die Abelsche Form erhalten, wenn es gelänge, $\Gamma(\varrho, \varDelta)$ in der Form

$$\Gamma(\varrho, \varDelta) = \gamma(\varrho, \varDelta) . u(\varrho) . v(\varDelta) \tag{9}$$

darzustellen, wobei u und v geeignet zu wählende Funktionen von ϱ bzw. $\varDelta$ allein sind. Eine strenge Darstellung dieser Art ist zwar nicht möglich; immerhin läßt sich eine wesentliche Verbesserung gegenüber der einfachen Ersetzung von Γ durch γ erzielen, da wir uns auf die Behandlung des Problems in der Nähe des Randes beschränken.

Bilden wir den Quotienten $\frac{\Gamma}{\gamma}$, so treten darin Ausdrücke auf von der Form

$$A(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}; \quad x = \frac{\mu+\varrho}{\varDelta},$$

für die wir zunächst eine Abschätzung gewinnen müssen. Da $y = \sqrt{1-x^2}$ die Gleichung des Krümmungsradius im Scheitel der arc cos-Kurve $y = \arccos x$ ist, weichen Zähler und Nenner nicht sehr voneinander ab; es ist $A(1) = 1$, $A(0) = \frac{2}{\pi}$. Der lineare Ansatz

$$A(x) \approx a_0 + a_1 x \quad \text{mit} \quad a_0 = 0.641; \quad a_1 = 0.363 \tag{10}$$

gibt bereits eine gute Darstellung, wie aus folgender Tabelle hervorgeht:

x	$A(x)$	$a_0 + a_1 x$	Diff.
0.0	0.637	0.641	− 0.004
.1	.677	.677	.000
.2	.716	.714	+ .002
.3	.754	.750	+ .004
.4	.791	.786	+ .005
.5	.827	.823	+ .004
.6	.863	.859	+ .004
.7	.898	.895	+ .003
.8	.933	.932	+ .001
.9	.967	.968	− .001
1.0	1.000	1.004	− .004.

Die Einführung von (10) in (7) ergibt bei Weglassung aller Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$\frac{\Gamma(\varrho, \Delta)}{\gamma(\varrho, \Delta)} = k(1+\alpha\Delta)(1+\beta\varrho) \tag{11}$$

mit

$$k = 1 + \frac{a_1\mu}{2}; \quad \alpha = \frac{4a_0 - a_0\mu}{4(2+a_1\mu)}; \quad \beta = \frac{2a_1 + a_1\mu}{2(2+a_1\mu)}.$$

Hiermit ist die gewünschte Form (9) erzwungen mit einer Genauigkeit von etwa 1 % für $\Delta < 0.3$. Als Beispiel seien die strengen und genäherten Werte von $\frac{\Gamma}{\gamma}$ für $\mu = 0.1$, $\Delta = 0.2$ und verschiedene ϱ angegeben:

ϱ	Γ/γ (streng)	Γ/γ (nach (11))	Diff.
0.00	1.081	1.080	+.001
.01	.083	.082	+.001
.02	.086	.084	+.002
.03	.088	.086	+.002
.04	.090	.087	+.003
.05	.093	.089	+.004
.06	.095	.091	+.004
.07	.098	.093	+.005
.08	.100	.095	+.005
.09	.103	.097	+.006.

Der kleine Gang in den Differenzen ist vollkommen belanglos. Es bleibt nun noch zu zeigen, wie man zur Abelschen Integralgleichung kommt. Statt (5) haben wir jetzt zu behandeln die Gleichung

$$h(\Delta) = 2c\int_0^{\Delta-\mu} f(1-\varrho)\,\gamma(\varrho,\Delta)\,u(\varrho)\,v(\Delta)\,(1-\varrho)\,d\varrho \tag{12}$$

mit

$$u = 1+\beta\varrho; \quad v = k(1+\alpha\Delta). \tag{12'}$$

Setzt man

$$\frac{h(\Delta)}{v(\Delta)} = H(\Delta); \quad (1-\varrho)\,f(1-\varrho)\,u(\varrho) = F(\varrho),$$

so bekommt man

$$H(\Delta) = 2c\int_0^{\Delta-\mu} F(\varrho) \arccos\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\,d\varrho,$$

hieraus durch Differentiation nach Δ

$$H'(\Delta) = \frac{2c}{\Delta}\int_0^{\Delta-\mu} \frac{F(\varrho)}{\sqrt{\Delta^2-(\mu+\varrho)^2}}\,(\mu+\varrho)\,d\varrho.$$

Durch Einführung der neuen Variablen

$$(\varrho+\mu)^2 = t; \quad \Delta^2 = \delta$$

und der neuen Funktionen

$$\frac{\Delta}{c} H'(\Delta) = G(\delta); \quad F(\varrho) = \Phi(t)$$

erhält man die Abelsche Integralgleichung

$$G(\delta) = \int_{\mu^2}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{\delta - t}}\, dt \tag{13}$$

mit der Umkehrung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_{\mu^2}^{\delta} \frac{G(\delta)}{\sqrt{z-\delta}}\, d\delta = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dz} \int_{\mu^2}^{\delta} G'(\delta) \sqrt{z-\delta}\, d\delta. \tag{14}$$

Die praktische Behandlung des Problems hat also in folgender Weise zu geschehen:

1. Die Gesamthelligkeit des unverfinsterten Teiles der Sonne wird zunächst als Funktion der Zeit beobachtet. Man hat sie so zu transformieren, daß man sie in Abhängigkeit von Δ bekommt: $h(\Delta)$.

2. Man berechnet die Funktionen $u(\varrho)$ und $v(\Delta)$ für das bei der betreffenden Finsternis geltende μ.

3. Man berechnet die Funktion $G'(\delta)$ und erhält durch numerische Integration und Differentiation $\Phi(z)$.

4. Hieraus bekommt man

$$f(1-\sqrt{z}+\mu) = \frac{\Phi(z)}{(1-\sqrt{z}+\mu)\, u(\sqrt{z}-\mu)}.$$

Die folgende Figur 3 gibt ein zusammengehöriges Funktionenpaar $h(\Delta)$ und $f(\varrho)$. Die Werte von $h(\Delta)$ wurden den Beobachtungen der Göttinger Expedition bei der Finsternis in Lappland 1927 entnommen; für ihre Überlassung sind wir Herrn Prof. Kienle sehr zu Dank verpflichtet. Die Figur soll indessen keinen Beitrag zur Kenntnis der Randverdunklung geben, da eine endgültige Reduktion der Finsternisbeobachtungen noch nicht durchgeführt ist.

B. Ringförmige Sonnenfinsternis. Bei einer ringförmigen Sonnenfinsternis liegen die Verhältnisse insofern wesentlich anders, als vom Augenblick des zweiten Kontaktes an die Integralgleichung keine eindeutige Lösung $f(r)$ mehr hat. Während bis zum zweiten Kontakt die Integralgleichung (5) und die Lösungsmethode ihre

Gültigkeit behalten, ist für $\varDelta \leqq 1-m$ $f(r)$ zu bestimmen aus

$$(15)\quad h(\varDelta) = 2c\left\{\int_{m-\varDelta}^{m+\varDelta} r f(r) \arccos \frac{m^2-r^2-\varDelta^2}{2r\varDelta} dr + \pi \int_{m+\varDelta}^{1} r f(r) dr\right\}.$$

Da man (15) auch in der Form

$$(15')\quad h(\varDelta) = 2c\int_{m-\varDelta}^{m} r f(r) \varphi(r,\varDelta) dr + 2c\left\{\int_{m}^{m+\varDelta} r f(r) \varphi(r,\varDelta) dr + \pi \int_{m+\varDelta}^{1} r f(r) dr\right\}$$

schreiben kann, so folgt, daß man $f(r)$ entweder in dem Bereich

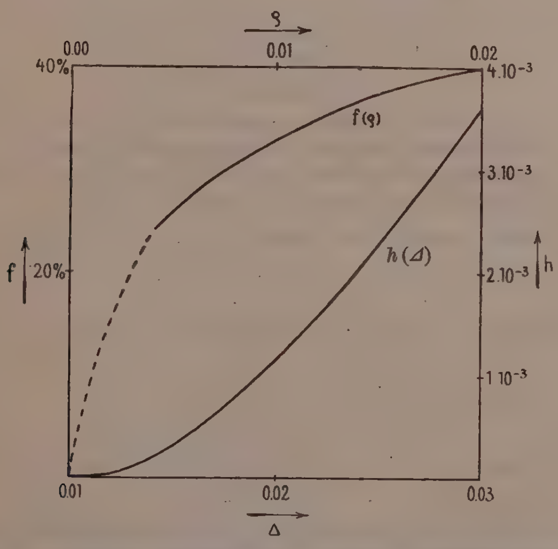


Fig. 3. Verlauf von $h(\varDelta)$ und $f(\varrho)$ $(\mu = 0.01)$. Bezifferung für $h(\varDelta)$ unten und rechts, für $f(\varrho)$ oben und links.

$2m-1 \leqq r < m$ vorgeben kann, wodurch es dann in dem Bereich $m \leqq r \leqq 1$ bestimmt ist oder umgekehrt (Fig. 4) (S. 90). Die Art der Unbestimmtheit zeigt die folgende Rechnung genähert. Durch die Substitutionen

$$x = m - r; \quad \mu = 1 - m$$

ergibt sich unter Vernachlässigung der quadratischen Glieder analog

zu (8)

$$(16)\qquad h(\varDelta) = 2c\left\{\int_{-\varDelta}^{+\varDelta} L(x)\arccos\frac{x}{\varDelta}\,dx + \pi\int_{-\mu}^{-\varDelta} L(x)\,dx\right\}.$$

Ist nun $L_0(x)$ eine Lösung, so ist es auch $L(x) = L_0(x) + S(x)$,

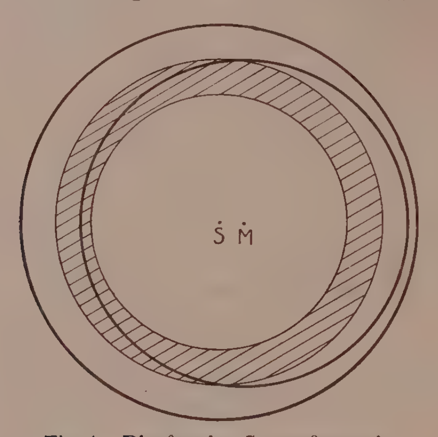


Fig. 4. Ringförmige Sonnenfinsternis.
S Mittelpunkt der Sonne, M Mittelpunkt des Mondes.
Der zu S konzentrische schraffierte Ring ist der Bereich $2m-1 \leqq r < m$.
Er wird umschlossen vom Bereiche $m \leqq r \leqq 1$.

wenn $S(x)$ eine symmetrische Funktion ist, deren Integral von 0 bis μ verschwindet; denn die Einsetzung in (16) ergibt

$$0 = \int_0^{\varDelta} S(x)\arccos\frac{x}{\varDelta}\,dx + \int_0^{\varDelta} S(x)\arccos\left(-\frac{x}{\varDelta}\right)dx + \pi\int_{-\mu}^{-\varDelta} S(x)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\varDelta} S(x)\,dx + \pi\int_{\varDelta}^{\mu} S(x)\,dx = \pi\int_0^{\mu} S(x)\,dx.$$

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen wir $f(r)$ in einem der beiden Bereiche $2m-1 \leqq r < 1-m$ oder $1-m \leqq r \leqq 1$ fest vorgeben, dann erst ist es für den jeweils anderen Bereich festgelegt. Da es vor allem auf die Untersuchung der äußersten Zone ankommt, ist es zweckmäßig, die Helligkeitsverteilung in dem inneren Ring aus anderen Untersuchungen zu entnehmen. Dann reduziert sich (15) auf

$$(17)\qquad Q(\varDelta) = 2c\left\{\int_m^{m+\varDelta} r f(r)\arccos\frac{m^2-r^2-\varDelta^2}{2r\varDelta}\,dr + \pi\int_{m+\varDelta}^{1} r f(r)\,dr\right\},$$

wobei

$$Q(\varDelta) = h(\varDelta) - 2c\int_{m-\varDelta}^{m} r f(r) \arccos \frac{m^2 - r^2 - \varDelta^2}{2r\varDelta}\, dr$$

als bekannt anzusehen ist. Durch Einführung der Näherung für den Kern und Differentiation nach $\varDelta$ läßt sich (17) in der gleichen Weise wie (5) auf die Abelsche Form bringen, was hier nicht näher ausgeführt werden soll. Es sei noch hervorgehoben, daß die Anwendung dieses Verfahrens nur bei solchen Finsternissen lohnend ist, bei denen der Mondradius um mehrere % kleiner ist als der Sonnenradius.

Göttingen, Universitäts-Sternwarte, Juni 1929.

Über eine Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von

Georg Rumer (Moskau).

Vorgelegt von M. BORN in der Sitzung am 6. Juli 1929.

Es sind schon verschiedene Versuche gemacht worden, eine einheitliche Feldtheorie für Gravitation und Elektrizität aufzustellen. WEYL, EDDINGTON und EINSTEIN suchten dieses Ziel zu erreichen, indem sie die Metrik des vierdimensionalen Raumes („Welt") erweiterten. KALUZA [1]) dagegen bleibt bei der Riemannschen Metrik, gebraucht aber dafür einen fünfdimensionalen Raum. Die vorliegende Arbeit schließt sich eng an KALUZA an.

Wir geben hier kurz die Ergebnisse von KALUZA wieder, die für uns im weiteren wichtig sind. KALUZA begibt sich in einen V_5 [2]) und überträgt auf ihn die Einsteinschen Ansätze; dabei mag x^0 als neue Koordinate neben die gewohnten $x^1 x^2 x^3 x^4$ treten. Die Metrik sei durch den Tensor

$$\begin{pmatrix} g_{ik} & \varphi_i \\ \varphi_i & \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_i = g_{i0}, \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

bestimmt. Er betrachtet den „zylindrischen Fall"

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^0} = 0,$$

welcher ein Analogon des „statischen Falles" in der allgemeinen Relativitätstheorie ist. Nun rechnet KALUZA die „überzählige" Γ^i_{kl} aus, also diejenigen, die den Index 0 erhalten.

Es ist z. B.

$$\Gamma_{0k,l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} = F_{kl}, \quad \Gamma_{0k,0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^k}.$$

1) TH. KALUZA, Zum Unitätsproblem der Physik, Berl. Berichte 1921.

2) Es bedeutet: V_n Riemannscher Raum, E_n Euklidischer oder Pseudoeuklidischer Raum.

Dabei entstehen aus der umfassenden Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^m}(\Gamma_{ik,l}+\Gamma_{kl,i}+\Gamma_{li,k}) = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{mi,k}+\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{mk,l}+\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{ml,i}$$

vermöge der Zylinderbedingung für $m = 0$ das erste System von Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0,$$

falls die φ_i als elektrische Potenziale gedeutet werden.

Um zum zweiten System von Maxwellschen Gleichungen zu gelangen, macht KALUZA die Annahme, daß die

$$\begin{pmatrix} g_{ik} & \varphi_i \\ \varphi_i & \varphi_0 \end{pmatrix}$$

unendlich wenig von ihren Normalwerten abweichen. Bei dieser Näherung ist $\Gamma^i_{kl} \sim \Gamma_{kl,i}$. Nun rechnet KALUZA die R_{ik}, R_{0i} und R_{00} aus und schreibt:

1) R_{ik} — wie früher,
2) $R_{0i} \sim \Delta i v_k F_{ik}$,
3) $R_{00} \sim \Box \varphi_0$.

Die ersten Gleichungen liefern die Einsteinschen Gleichungen der Gravitation, die zweiten die Maxwellschen, die dritte eine Poissonsche Gleichung. Entsprechend den linken Seiten müssen auch die rechten gerändert werden

$$\begin{pmatrix} R_{ik} & R_{i0} \\ R_{i0} & R_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{ik} & T_{i0} \\ T_{i0} & T_{00} \end{pmatrix},$$

und es ist leicht zu ersehen, daß der Energietensor in V_4 beim Übergang zum V_5 im wesentlichen durch die Stromdichte s_i zu rändern ist. Als Eckglied kommt eine Massendichte $T_{00} = \mu$ zum Vorschein.

I.

Ich möchte weiter zeigen, was für Folgen für die Gedanken KALUZAS entstehen, wenn wir neue geometrische Begriffe, die bis jetzt in der Relativitätstheorie unberücksichtigt geblieben sind, heranziehen. In der allgemeinen Riemannschen Geometrie existieren Fragestellungen, die in der Flächentheorie kein Analogon haben. Das sind die Fragen nach der Einbettungsmöglichkeit eines V_n in V_{n+p}[1]. Es sei in einer V_{n+p} mit der Maßbestimmung

1) BERWALD, Encyclopädie der Mathem. Wissenschaften III 3.

$$\bar{g}_{AN} \qquad A, N = 1, 2, \ldots (n+p)$$

vermöge der Gleichungen

$$\bar{x}^A = x^A(x^1 x^2 \ldots x^n)$$

eine V_n eingebettet.

In einem willkürlichen Punkte P dieser V_n spannen dann die Vektoren e_μ mit den Koordinaten

$$e_\mu^A = \frac{\partial x^A}{\partial x^\mu}$$

innerhalb des $(n+p)$-dimensionalen Vektorraumes von P den n-dimensionalen Tangentialraum der V_n auf. Die Metrik in V_n wird durch den Maßtensor

$$g_{\lambda\mu} = \bar{g}_{AM}\, e_\lambda^A\, e_\mu^M$$

bestimmt. Um die Metrik der V_{n+p} auf die V_n übertragen zu können, muß dem Punkt P der V_n auch noch ein p-dimensionaler Normalraum zugeordnet werden. Dieser bestehe aus allen Vektoren, die zum Tangentialraum senkrecht stehen. Er werde festgelegt durch p paarweise senkrechte Einheitsvektoren

$$\bar{g}_{AM}\, e_\alpha^A\, e_\beta^M = \delta_{\alpha\beta}, \quad \bar{g}_{AM}\, e_\alpha^A\, e_\mu^M = 0, \qquad \alpha, \beta = n+1, \ldots n+p.$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß eine V_n in V_{n+p} einbettbar ist, lauten:

$$\bar{R}_{AMNP}\, e_\lambda^A\, e_\nu^N\, e_\mu^M\, e_\varrho^P = R_{\lambda\mu\nu\varrho} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} (\overset{\alpha}{H}_{\lambda\nu}\, \overset{\alpha}{H}_{\mu\varrho} - \overset{\alpha}{H}_{\lambda\varrho}\, \overset{\alpha}{H}_{\mu\nu}) \quad \text{(Gauss)}$$

$$\bar{R}_{AMNP}\, e_\alpha^A\, e_\mu^M\, e_\nu^N\, e_\varrho^P = \overset{\alpha}{H}_{\mu\varrho;\nu} - \overset{\alpha}{H}_{\mu\nu;\varrho} + \sum_{\beta=1}^{\beta=p} (\overset{\beta}{H}_{\mu\varrho}\, \overset{\beta\alpha}{T}_\nu - \overset{\beta}{H}_{\mu\nu}\, \overset{\beta\alpha}{T}_\varrho) \quad \text{(Codazzi)}$$

$$\bar{R}_{AMNP}\, e_\alpha^A\, e_\beta^M\, e_\nu^N\, e_\varrho^P = \overset{\alpha\beta}{T}_{\nu;\varrho} - \overset{\alpha\beta}{T}_{\varrho;\nu} - \sum_{\gamma=1}^{\gamma=p} (\overset{\gamma\alpha}{T}_\nu\, \overset{\gamma\beta}{T}_\varrho - \overset{\gamma\alpha}{T}_\varrho\, \overset{\gamma\beta}{T}_\nu)$$

$$- g^{\sigma\tau} (\overset{\alpha}{H}_{\sigma\nu}\, \overset{\beta}{H}_{\tau\varrho} - \overset{\alpha}{H}_{\sigma\varrho}\, \overset{\beta}{H}_{\tau\nu}) \quad \text{(Kühne)}.$$

Die Striche beziehen sich auf die Größen in V_{n+p}.

$\overset{\alpha}{H}_{ik} = \overset{\alpha}{H}_{ki}$ sind die p „zweiten" Fundamentalformen der gewöhnlichen Flächentheorie[1]).

$\overset{\alpha\beta}{T}_i = -\overset{\beta\alpha}{T}_i$ sind nach Weyl die $\frac{p(p-1)}{2}$ Torsionen der V_n. Für $p = 1$ verschwinden sie alle. „;" bedeutet kovariante Differenziation

1) H. Weyl, Math. Zeitschr. 1922.12 nennt sie „Krümmungen" der V_n. Die Riemann-Krümmung wird entsprechend „Wirbel" genannt.

nach der Grundform g_{ik}. Diese Gleichungen zeigen auch, wie die Riemann-Tensoren eines Raumes mit den Riemann-Tensoren der Unterräume verbunden sind. Aus ihnen folgt [1])

$$\bar{R}_{\Lambda P}\, e^{\Lambda}_{\lambda}\, e^{P}_{\varrho} = R_{\lambda\varrho} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} (\overset{\alpha}{H}\overset{\alpha}{H}_{\lambda\varrho} - \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{\lambda}\overset{\alpha}{H}_{\sigma\varrho}) = R'_{\lambda\varrho},$$

$$\bar{R}_{\Lambda P}\, e^{\Lambda}_{\alpha}\, e^{P}_{\varrho} = \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{\varrho;\sigma} - \overset{\alpha}{H}_{,\varrho} + \sum_{\beta=1}^{\beta=p} (\overset{\beta}{H}{}^{\sigma}_{\varrho}\overset{\beta\alpha}{T}_{\sigma} - \overset{\beta}{H}\overset{\beta\alpha}{T}_{\varrho}) = R'_{\alpha\varrho},$$

wo R' die $\bar{R}$ bedeuten, an denen die Einbettungstransformation schon durchgeführt ist.

Rechnen wir noch die $\frac{p(p+1)}{2}$ Tensorkomponenten in V_{n+p} (Skalare in V_n)

$$R'_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\Lambda P}\, e^{\Lambda}_{\alpha}\, e^{P}_{\beta} = A_{\alpha\beta}$$

aus, so sehen wir, wie die verjüngten Riemann-Tensoren des Raumes mit den verjüngten Tensoren der Unterräume und entsprechenden $\overset{\alpha}{H}$ und $\overset{\alpha\beta}{T}$ verbunden sind.

$$\begin{array}{c|c} R'_{ik} & R'_{i\alpha} \\ \hline R'_{\alpha i} & R'_{\alpha\beta} \end{array} = \begin{array}{c|c} R_{ik} + \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=p} (\overset{\alpha}{H}\overset{\alpha}{H}_{ik} - \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{i}\overset{\alpha}{H}_{\sigma k}) & \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{i;\sigma} - \overset{\alpha}{H}_{,i} + \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=p} (\overset{\beta}{H}{}^{\sigma}_{i}\overset{\beta\alpha}{T}_{\sigma} - \overset{\beta}{H}\overset{\beta\alpha}{T}_{i}) \\ \hline \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{i;\sigma} - \overset{\alpha}{H}_{,i} + \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=p} (\overset{\beta}{H}{}^{\sigma}_{i}\overset{\beta\alpha}{T}_{\sigma} - \overset{\beta}{H}\overset{\beta\alpha}{T}_{i}) & A_{\alpha\beta}. \end{array}$$

Da eine beliebige V_n in einen E_{n+s} sich immer einbetten läßt, wo

$$1 \leqq s \leqq \frac{n(n-1)}{2}$$

die Zahl s die Klassenzahl von V_n nach Ricci genannt wird, folgt

$$(1) \qquad R_{ik} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=s} (\overset{\alpha}{H}\overset{\alpha}{H}_{ik} - \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{i}\overset{\alpha}{H}_{\sigma k}) = 0,$$

$$(2) \qquad \overset{\alpha}{H}{}^{\sigma}_{i;\sigma} - \overset{\alpha}{H}_{,i} + \sum_{\beta=1}^{\beta=s} (\overset{\beta}{H}{}^{\sigma}_{i}\overset{\beta\alpha}{T}_{\sigma} - \overset{\beta}{H}\overset{\beta\alpha}{T}_{i}) = 0.$$

II.

Nun wollen wir diese geometrischen Ergebnisse auf die Relativitätstheorie anwenden und uns fragen, welche physikalische Bedeutung die H und T bekommen, falls die g_{ik} als Gravitationspotentiale gedeutet werden [2]).

1) $H = H^{\sigma}_{\sigma}$ bedeutet die Spur von H_{ik}.

2) Wir setzen weiterhin immer die Minkowskische Darstellung voraus (die Maßbestimmungen sind positiv definit gemacht).

Aus Einsteins Gleichung für den nicht leeren Raum und (1) folgt für $V_n = V_4$

$$R_{ik} + (T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T) = 0,$$

$$T_i^k = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=s} (\overset{\alpha}{H}{}_i^\sigma \overset{\alpha}{H}{}_\sigma^k - \overset{\alpha}{H} \overset{\alpha}{H}{}_i^k) - \tfrac{1}{2} \delta_i^k (\overset{\alpha}{H}{}_\sigma^\varrho \overset{\alpha}{H}{}_\varrho^\sigma - \overset{\alpha}{H}{}^2).$$

Es scheint also möglich zu sein, den Energietensor geometrisch zu interpretieren, indem man nicht nur die Metrik von V_4, sondern auch diejenigen geometrischen Begriffe, die seine Einbettungsmöglichkeiten beschreiben, berücksichtigt. Dabei lassen wir noch die Frage offen, wie groß die Zahl s ist.

Wir schreiben die Gleichungen der Gravitation und Elektrizität im leeren Raum nach Kaluza

$$R_{ik} = 0 \text{ in } V_5.$$

Wollen wir sie in quellenhafter Form schreiben, so gehen wir nach V_4 über.

$$\begin{aligned} R'_{ik} &= R_{ik} + (H . H_{ik} - H_i^\sigma H_{\sigma k}) = 0, \\ R'_{i0} &= H^\sigma_{i;\sigma} - H_{,i} = 0, \\ R'_{00} &= A_{00} = 0. \end{aligned}$$

Sie zerfallen dann in eine tensorielle, vektorielle und skalare Gleichung, die in V_4 nicht formal verbunden sind. Da Kaluza die Abhängigkeit der R in V_5 und V_4 nicht kannte, hat er die Näherung $\Gamma^i_{kl} \sim \Gamma_{kl,i}$ zu früh angewandt und $R'_{ik} = R_{ik}$ gesetzt. Die Stromdichten sind durch

$$H^\sigma_{i;\sigma} - H_{,i} = s_i$$

gegeben. Die skalare Gleichung liefert die Gravitation erzeugende Wirkung der Elektrizität.

Wollen wir auch die Gravitationsquelle explizit zum Vorschein bringen, so gehen wir zum V_3 über.

$$R'_{ik} = R_{ik} + (G G_{ik} - G_i^\sigma G_{\sigma k}) + (E E_{ik} - E_i^\sigma E_{\sigma k}) = 0,$$

$$\begin{aligned} R'_{4k} &= G^\varrho_{k;\varrho} - G_{,k} + (E_k^\varrho \overset{21}{T}_\varrho - E \overset{21}{T}_k) = 0 \\ R'_{0k} &= E^\varrho_{k;\varrho} - E_{,k} + (G_k^\varrho \overset{12}{T}_\varrho - G \overset{12}{T}_k) = 0 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} R'_{44} & R'_{40} \\ R'_{04} & R'_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{44} & A_{40} \\ A_{04} & A_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ist $\overset{12}{T} = 0$, so ist auch $E_{ik} = 0$. Die Gleichungen sind dann Einsteins Gleichungen der Gravitation $R_{ik} = 0$ (in V_4) geschrieben in quellenhafter Form (in V).

$$
\begin{aligned}
R'_{ik} &= R_{ik} + (G\,.\,G_{ik} - G_i^\sigma G_{\sigma k}) = 0, \\
R'_{4k} &= G^\varrho_{k;\,\varrho} - G_{,k} = 0, \\
R'_{44} &= A_{44} = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

An den Stellen also, wo der dreidimensionale Raum eine nicht verschwindende Torsion besitzt, existiert ein elektrisches Feld. (3) zeigen deutlich den Zusammenhang der Newtonschen und Einsteinschen Gravitationslehre. In der Newtonschen wird

$$R'_{ik} = R_{ik} = 0$$

gesetzt, also der Raum euklidisch angenommen[1]). Die rechten Seiten der vektoriellen Gleichung werden ebenfalls vernachlässigt. Die dritte skalare Gleichung liefert in erster Näherung die Laplacesche Gleichung

$$\Delta \varphi_0 = 0$$

(der statische Fall vorausgesetzt).

Wir haben erstens die Elektrizität in die Metrik einverleibt, indem wir zum fünfdimensionalen Raum übergegangen sind, zweitens aber haben wir die Gravitation von der Metrik abgespaltet, indem wir zum dreidimensionalen Raum zurückgegangen sind. Diese Überlegung erlaubt uns, die Relativitätstheorie als Analogon der Flächentheorie aufzufassen. Wir schreiben die Gleichungen für einen allgemeinen V_3, der ja immer in einen E_6 eingebettet sein kann.

$$
\begin{aligned}
R_i'^{k} &= R_i^k + (G\,.\,G_i^k - G_\sigma^k G_i^\sigma) + (E\,.\,E_i^k - E_\sigma^k E_i^\sigma) + (M\,.\,M_i^k - M_\sigma^k M_i^\sigma) = 0, \\
R_i'^{4} &= G^\sigma_{i;\,\sigma} - G_{,i} + E_i^\sigma \overset{21}{T}_\sigma - E\overset{21}{T}_i + M_i^\sigma \overset{31}{T}_\sigma - M\overset{31}{T}_i = 0, \\
R_i'^{5} &= E^\sigma_{i;\,\sigma} - E_{,i} + G_i^\sigma \overset{12}{T}_\sigma - G\overset{12}{T}_i + M_i^\sigma \overset{32}{T}_\sigma - M\overset{32}{T}_i = 0, \\
R_i'^{6} &= M^\sigma_{i;\,\sigma} - M_{,i} + G_i^\sigma \overset{13}{T}_\sigma - G\overset{13}{T}_i + E_i^\sigma \overset{23}{T}_\sigma - E\overset{23}{T}_i = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} R'_{44} & R'_{45} & R'_{46} \\ R'_{54} & R'_{55} & R'_{56} \\ R'_{64} & R'_{65} & R'_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{44} & B_{45} & C_{46} \\ B_{54} & B_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Bei $M = 0$ verschwinden die C
„ $E = 0$ „ „ B
„ $G = 0$ „ „ A
identisch.

Aus der Kühneschen Bedingung folgt:

$$G_i^\sigma E_{\sigma k} - G_{\sigma k} E_i^\sigma = (\overset{12}{T}_{i;\,k} - \overset{12}{T}_{k;\,i}) - (\overset{31}{T}_i \overset{32}{T}_k - \overset{31}{T}_k \overset{32}{T}_i)$$

und zwei andere die durch zyklische Permutation aus ihr folgen.

---

1) In V_3 genügt schon $R_{ik} = 0$ für die Euklidizität.

G, E, M sind die I., II. und III. Krümmungen des Raumes. In dieser dreidimensionalen Schreibweise kommen alle Quellen explizit zum Vorschein, die Gleichungen aber zerfallen in formal unabhängige Systeme.

Wir sehen, daß der Prozeß der sukzessiven Abspaltung der Bestandteile der Substanz (Gravitation, Elektrizität) und ihrer Einverleibung in die Metrik, indem man zu den höheren Dimensionen übergeht, mit der sechsten Dimension automatisch aufhört. Wir lassen die Frage offen, was man unter dem Bestandteil der Substanz zu verstehen hat, welcher geblieben ist, falls die Gravitation und Elektrizität von ihr abgespaltet wird. Mir scheint der Ausdruck Materie am passendsten. Man muß es sich folgendermaßen vorstellen[1]):

$(E) \neq 0$

$(M) \neq 0$

$(G) = 0$ | $(E) = 0$ | $(M) = 0$ | | $(M) = 0$ | $(E) = 0$ | $(G) = 0$

$(G) \neq 0$

Der Raum ist im großen und ganzen euklidisch, also leer. An den Stellen, wo er eine nicht verschwindende (G) hat, ist ein Gravitationsfeld vorhanden. An den Stellen, wo auch (E) nicht verschwindet, ist ein Elektrizitätsfeld vorhanden. Wo aber auch (M) nicht verschwindet, existieren die felderzeugenden Strom- und Massendichten, der Gravitation und Elektrizität. An den Stellen ist der Raum nicht leer.

Bevor wir über die Deutung der fünften und sechsten Dimension sprechen, berichten wir kurz diejenigen Gedanken von O. KLEIN[2]) und EINSTEIN[3]), die beide (unabhängig von einander) in ihren Arbeiten über KALUZAS Theorie hervorgehoben haben. Sie lassen die Forderung der allgemeinen Kovarianz in V_5 fallen und fordern die Kovarianz nur gegenüber der speziellen Transformation

$$x_i = x_i(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4),$$
$$x_0 = \bar{x}_0 + \psi(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4).$$

Die entsprechende Geometrie ist durch den Maßtensor

$$\begin{pmatrix} g_{ik} + \varphi_i \varphi_k, & \varphi_i \\ \varphi_i & , -1 \end{pmatrix}$$

bestimmt.

1) Hierin bedeutet (A) einen Tensor mit den Komponenten
$$(A)_{ik} = A \cdot A_{ik} - A_i^\sigma A_{\sigma k}.$$
2) O. KLEIN, Zeitschr. für Physik, 1926.
3) EINSTEIN, Berl. Berichte 1927.

Nun rechnet EINSTEIN die Hamilton-Funktion

$$\mathfrak{H} = \sqrt{g}\,(g^{\sigma\tau}(\Gamma^i_{\sigma k}\Gamma^k_{\tau i} - \Gamma^i_{\sigma\tau}\Gamma^k_{ik}) + F^i_k F^k_i).$$

Bei dieser Annahme folgen die Maxwellschen Gleichungen genau, nicht nur in erster Näherung.

Wenn wir bedenken, daß die etwas künstlich erscheinende Zylinderbedingung nichts anderes ist als die statische Bedingung in der allgemeinen Relativitätstheorie [1]), angewandt auf die fünfte Dimension, so liegt die allerdings wenig einladende und paradoxal erscheinende Vermutung nahe, die Zeit an bestimmten Stellen (wo elektrische Felder vorhanden sind) mehrdimensional anzunehmen. Die entstehende Polychronität hat mit unserer Auffassung der Zeit nichts zu tun, da die Zeit, die wir messen und empfinden, die Eigenzeit ist, also die Länge der Weltlinie. Die entsprechende Lorenztransformation der polychronen Welt ist im allgemeinen nicht kommutativ und es hat zur Folge, daß in den elektrischen Feldern die Geschwindigkeiten nicht dem Additionstheorem genügen.

Das sind aber Vermutungen, die nur der weitere Ausbau der vorliegenden Theorie bestätigen oder widerlegen kann. Was ich wollte, war, die Aufmerksamkeit wieder auf KALUZAS Ideen zu lenken und zu zeigen, daß die Einbettungseigenschaften der Welt und des Raumes physikalisch interpretiert werden können. Die Art und Weise, in welcher die Substanz auf den Raum wirkt und seine Metrik bedingt, waren Fragen von größter erkenntnistheoretischer Schwierigkeit in der allgemeinen Relativitätstheorie, scheinen aber in der vorliegenden Theorie geklärt zu sein.

Auch erscheint der Übergang zum fünfdimensionalen (zur Elektrizität), von dem KALUZA schreibt: „es wäre schwer zu denken, daß hier nur ein Zufall sein launisches Spiel treibt" als natürlicher zweiter Schritt, nach dem ersten Schritt, den EINSTEIN gemacht hat, indem er zum vierdimensionalen (zur Gravitation) gekommen ist.

Ich erlaube mir, an dieser Stelle Herrn Professor Dr. M. BORN meinen besonderen Dank auszusprechen für sein hilfsbereites Interesse, das er für meine Gedanken gezeigt hat, und auch Herrn Dr. HEITLER zu danken für die Möglichkeit der wissenschaftlichen Diskussion mit ihm, in der mir vieles geklärt wurde.

---

1) Vgl. LEVI-CIVITA. ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.

Spinoranalyse.

Von

B. L. van der Waerden in Groningen (Holland).

Vorgelegt von R. Courant in der Sitzung am 26. Juli 1929.

„Nennen wir die neuartigen Größen, die neben den Vektoren und Tensoren in der Quantenmechanik des Spinning Electron aufgetreten sind, und die sich bei der Lorentzgruppe ganz anders transformieren wie Tensoren, kurz Spinoren. Gibt es keine Spinoranalyse, die jeder Physiker lernen kann wie Tensoranalyse, und mit deren Hilfe man erstens alle möglichen Spinoren, zweitens alle invarianten Gleichungen, in denen Spinoren auftreten, bilden kann?" So fragte mich Herr Ehrenfest, und die Antwort soll im folgenden gegeben werden.

Es zeigt sich, daß man die gestellte Frage ohne irgendwelche neue Hilfsmittel lösen kann. Man braucht, um alle überhaupt möglichen Spinoren zu finden, nur alle Darstellungen der Lorentzgruppe aufzustellen, und diese sind bekannt[1]). Um weiter zu einer Invariantentheorie für die Spinoren zu kommen, hat man nur die bekannte zweistufige Isomorphie zwischen der Lorentzgruppe und der binären unimodularen Gruppe in ebenfalls bekannter Weise zu einem „Übertragungsprinzip" für die Kovarianten beider Gruppen zu verwerten[2]) und einen bekannten Satz der Invariantentheorie zu benutzen, um einzusehen, daß alle überhaupt möglichen invarianten Gleichungen sich als binäre Tensorgleichungen schreiben lassen.

Nach der physikalischen Seite hin ergibt sich ein vollständiger Überblick über alle möglichen invarianten Wellengleichungen. Es zeigt sich, daß eine Lorentzinvariante lineare Wellengleichung für das spinning electron mit nur zwei Wellenfunktionen und von

1) Vgl. etwa H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig 1928, und die dort genannte Literatur.

2) Siehe E. A. Weiss, Ein räumliches Analogon zum Hesseschen Übertragungsprinzip, Diss. Bonn 1924.

erster Ordnung notwendig zu der Diracschen Gleichung ohne das Massenglied führt, also nicht mit der Tatsache der Masse in Einklang steht. Man ist also gezwungen, entweder Differentialgleichungen zweiter Ordnung oder mindestens 4 Wellenfunktionen zu benutzen. Auch diese kann man alle aufstellen: es ergeben sich da noch sehr viel Möglichkeiten.

§ 1. Die Darstellungen der Lorentzgruppe.

Die Aufgabe, alle „Größen" zu finden, die bei Lorentztransformationen nach irgendeiner Regel linear mit-transformiert werden, so daß bei Zusammensetzung zweiter Lorentztransformationen auch die zugehörigen Transformationen der „Größen" zusammengesetzt werden, d. h. so daß dem Produkt zweier Lorentztransformationen wieder das Produkt entspricht, ist nichts anderes als das Problem der Darstellung der Lorentzgruppe durch lineare Transformationen.

Es ist bekannt, daß die Lorentzgruppe eine zweideutige Darstellung als binäre Gruppe (d. h. als Gruppe in zwei komplexen Veränderlichen) besitzt; diese wollen wir zunächst aufschreiben.

Wir gehen von einer Transformationsgruppe in 2 komplexen Variablen aus, die wir nachher zur Lorentzgruppe in Beziehung setzen werden.

Die binären Transformationen von der Determinante 1:

$$(1)\quad \begin{cases} \xi_1' = \alpha_{11}\,\xi_1 + \alpha_{12}\,\xi_2 \\ \xi_2' = \alpha_{21}\,\xi_1 + \alpha_{22}\,\xi_2 \end{cases} \qquad (1)\quad \begin{cases} \bar\xi_1' = \alpha_{11}\,\bar\xi_1 + \bar\alpha_{12}\,\bar\xi_2 \\ \bar\xi_2' = \bar\alpha_{21}\,\bar\xi_1 + \bar\alpha_{22}\,\bar\xi_2 \end{cases}$$

lassen, wenn η_1, η_2 kogredient zu den ξ_i transformiert werden, den Ausdruck $\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1$ invariant, und transformieren daher $\eta_2, -\eta_1$ kontragredient zu ξ_1, ξ_2. Man kann daher setzen:

$$(2)\quad \begin{cases} \eta^1 = \eta_2 \\ \eta^2 = -\eta_1 \end{cases}$$

und ebenso für alle binären Vektoren und Tensoren, z. B.

$$\begin{cases} \xi^1 = \xi_2 \qquad a^{11} = a^1{}_2 = a_{22} \\ \xi^2 = -\xi_1 \qquad a^{21} = a^2{}_2 = a_{12}. \end{cases}$$

Wir verabreden, bei allen Größen die nach der konjugiert komplexen Transformation (4) transformiert werden, über dem Index einen Punkt zu schreiben (punktierte Indices). Die entsprechende Verabredung gilt für Tensoren; z. B. ist $a_{\lambda\dot\mu\nu}$ ein Tensor, der sich wie $\bar\xi_\lambda\,\bar\eta_\mu\,\zeta_\nu$ transformiert. Auch für die punktierten Indices sollen die obigen Verabredungen: $\xi^{\dot 1} = \xi_{\dot 2}$; $\xi^{\dot 2} = -\xi_{\dot 1}$ gelten.

Die Ausdrücke

$$\xi_{\dot 1}\xi_1, \quad \xi_{\dot 2}\xi_2, \quad \frac{\xi_{\dot 1}\xi_2 + \xi_{\dot 2}\xi_1}{2}, \quad \frac{\xi_{\dot 1}\xi_2 - \xi_{\dot 2}\xi_1}{2i}$$

sind reell, und werden durch die Transformationen (4), (4) wieder in reelle transformiert; also sind die Transformationskoeffizienten für diese Ausdrücke reell. Dieselben Transformationskoeffizienten gelten aber auch für einen Tensor $a_{\dot\alpha\beta}$ und die Ausdrücke

$$a_{\dot 1 1}, \quad a_{\dot 2 2}, \quad \frac{a_{\dot 1 1} + a_{\dot 2 2}}{2}, \quad \frac{a_{\dot 1 2} - a_{\dot 2 1}}{2i}.$$

Setzt man daher

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{a_{\dot 2 1} + a_{\dot 1 2}}{2} &= x \\ \frac{a_{\dot 2 1} - a_{\dot 1 2}}{2i} &= y \\ \frac{a_{\dot 1 1} - a_{\dot 2 2}}{2} &= z \\ \frac{a_{\dot 1 1} + a_{\dot 2 2}}{2c} &= t \end{aligned} \right. \qquad \text{oder (4)} \quad \left\{ \begin{aligned} a_{\dot 2 1} &= x + iy \\ a_{\dot 1 2} &= x - iy \\ a_{\dot 1 1} &= z + ct \\ -a_{\dot 2 2} &= z - ct \end{aligned} \right.$$

so transformieren sich auch x, y, z, t reell. Außerdem ist:[1])

$$(5) \quad -\tfrac{1}{2} a^{\dot\alpha\beta} a_{\dot\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}(a^{\dot 1 2} a_{\dot 1 2} + a^{\dot 2 1} a_{\dot 2 1} + a^{\dot 1 1} a_{\dot 1 1} + a^{\dot 2 2} a_{\dot 2 2}) = a_{\dot 1 2} a_{\dot 2 1} - a_{\dot 2 2} a_{\dot 1 1}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

invariant, also haben wir eine reelle Lorentztransformation. Auch ist bekannt, daß jede reelle Lorentztransformation so erhalten werden kann[2]). Kehrt man die Vorzeichen der $\alpha_{\mu\nu}$ in (1) um, so erhält man dieselbe Transformation für die $a_{\dot\mu\nu}$, also bilden die Transformationen (4) eine zweideutige Darstellung der Lorentzgruppe. Schließlich ist jede Transformation (4) stetig aus der Identität zu erhalten, also erhalten wir unter unseren Welttransformationen weder die Raumspiegelungen, noch auch die Transformationen, welche die Ablaufsrichtung zur Zeit ändern.

Um die Spiegelungen mit zu erzeugen, nehmen wir zu (1) noch die Transformation mit hinzu, die jedes ξ_ν in $\xi_{\dot\nu}$ überführt. Sie führt eine Form $a^{\dot\mu\nu}\bar\xi_{\dot\mu}\xi_\nu$ in $a^{\mu\dot\nu}\xi_\mu\xi_{\dot\nu}$ und daher $a^{\dot\mu\nu}$ in $a^{\dot\nu\mu}$ und ebenso

---

1) Über oben und unten vorkommende Indices wird stillschweigend summiert.

2) Um das einzusehen, genügt es z. B., sich zu überlegen, daß man eine 6-gliedrige Schar von Lorentztransformationen aus (4) erhält.

$a_{\dot{\mu}\nu}$ in $a_{\dot{\nu}\mu}$ über. Daraus folgt, daß sie x, z und t invariant läßt aber y in $-y$ verwandelt, d. h. sie erzeugt eine Spiegelung an die XZ-Ebene.

Lassen wir vorläufig die Spiegelungen wieder weg, so ist klar, daß alle Darstellungen der Gruppe (4) sogleich auch Darstellungen der Lorentzgruppe sind, und umgekehrt. Die Gruppe (4) läßt aber, wie in der Darstellungstheorie gezeigt wird, keine anderen irreduziblen Darstellungen zu als diejenigen, die man erhält, wenn man binäre Tensoren $a_{\alpha\beta\ldots\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots}$, die in $\alpha\beta\ldots$ und in $\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots$ symmetrisch sind, als Transformationsobjekte zu Grunde legt. Jede beliebige Darstellung setzt sich aus solchen irreduziblen zusammen, d. h. man erhält jede Darstellung, wenn man als Transformationsobjekt einen oder mehrere Tensoren $a_{\alpha\beta\ldots\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots}$ mit oder ohne Symmetriebedingungen nimmt. Also sind die für die Lorentzgruppe in Betracht kommenden „Größen" keine anderen als diese binären Tensoren, transformiert nach den binären Tensorendarstellungen der Lorentzgruppe. Wir nennen sie, als „Größen der Lorentzgruppe" aufgefaßt, Spintensoren oder Spinoren und zwar Spintensoren 1., 2., ... Grad je nach der Anzahl der Indices. Speziell sollen die Größen mit nur einem (die Werte 1, 2 annehmenden) Index Spinvektoren heißen.[1])

§ 2. Die Einordnung der Weltvektoren und -Tensoren.

Da die binären Tensordarstellungen alle Darstellungen liefern, müssen sich auch die gewöhnlichen quaternären Weltvektoren und -Tensoren darunter finden, d. h. die Weltvektoren müssen sich als Spinoren mit binären Indices schreiben lassen.

Ein Weltvektor kann als a^k (kogredient zu x, y, z, t) gegeben sein, oder kontragredient dazu als $a_l = g_{lk}\, a^k$ ($g_{00} = -c^2$, $g_{11} = 1$, etc.). Wir führen nun für jeden Weltvektor eine neue Bezeichnung ein, indem wir setzen (entsprechend zu (4)):

---

1) Wenn man nicht die Größen der Lorentzgruppe, sondern die der dreidimensionalen Drehungsgruppe sucht, so ist es am leichtesten, diese Drehungsgruppe als diejenige Untergruppe der Lorentzgruppe aufzufassen, welche die Zeit t invariant läßt. Die Größe t transformiert sich wie $a_{\dot{1}1} + a_{\dot{2}2}$, also auch wie eine Hermiteische Form $\bar{\xi}_1\,\xi_1 + \bar{\xi}_2\,\xi_2$; mithin wird die Drehungsgruppe in der Darstellung (1) dargestellt durch die „unitäre" Untergruppe, welche eben diese Form invariant läßt. Bei dieser Untergruppe transformieren sich offensichtlich $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ kontragredient zu ξ_1, ξ_2, also wie ξ^1, ξ^2. Daher werden die punktierten Indices überflüssig: sie werden durch kontragrediente unpunktierte ersetzt. Die möglichen „Größen", die zu den irreduziblen Darstellungen gehören, sind wieder die symmetrischen Tensoren $a_{\alpha\beta\ldots\delta}$ der Stufe $2j = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\begin{cases} -a^{\dot 1 2} = a_{\dot 2 1} = a^1 + ia^2 = a_1 + ia_2 \\ -a^{\dot 2 1} = a_{\dot 1 2} = a^1 - ia^2 = a_1 - ia_2 \\ a^{\dot 2 2} = a_{\dot 1 1} = a^3 + ca^0 = a_3 - \frac{1}{c} a_0 \\ -a^{\dot 1 1} = -a_{\dot 2 2} = a^3 - ca^0 = a_3 + \frac{1}{c} a_0. \end{cases}$$

Entsprechend benennen wir alle Welttensoren um zu binären Tensoren; z. B. für einen Welttensor a_{ik} (der zunächst wie ein Produkt $a_i b_k$ behandelt werden soll):

$$\begin{aligned} a_{\dot 2 1, \dot 2 1} &= a_{1,1} + ia_{2,1} + ia_{1,2} - a_{2,2} \\ -a_{\dot 2 1, \dot 1 2} &= a_{1,1} + ia_{2,1} - ia_{1,2} + a_{2,2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad , \quad \cdot \\ a_{\dot 2 2, \dot 2 2} &= a_{3,3} + \frac{1}{c} a_{3,0} + \frac{1}{c} a_{0,3} + \frac{1}{c^2} a_{0,0}. \end{aligned}$$

Auch die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}$ können, da sie sich wie a_k transformieren, umbenannt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} &= \partial_{\dot 2 1} \\ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} &= \partial_{\dot 1 2} \\ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= \partial_{\dot 1 1} \\ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= -\partial_{\dot 2 2}. \end{aligned}$$

Wie aus (5) ersichtlich, ist:

$$a_k a^k = g_{kl} a^k a^l = -\tfrac{1}{2} a^{\dot\lambda\mu} a_{\dot\lambda\mu}$$

und daher auch

$$a_k b^k = a^k b_k = g_{kl} a^k b^l = -\tfrac{1}{2} a^{\dot\lambda\mu} b_{\dot\lambda\mu} = -\tfrac{1}{2} a_{\dot\lambda\mu} b^{\dot\lambda\mu}.$$

Diese Formeln gelten natürlich auch dann, wenn die Vektoren a, b durch Differentiationssymbole ersetzt werden; z. B. ist

$$\text{div. } a = -\tfrac{1}{2} \partial_{\dot\mu\nu} a^{\dot\mu\nu}$$

$$\square = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2} \partial_{\dot\lambda\mu} \partial^{\dot\lambda\mu}.$$

Die folgende Tabelle enthält die möglichen Arten von Spinoren der niedrigsten Stufen, mit der Angabe, welche Arten von Welttensoren ihnen entsprechen:

Spinoren

1. Stufe	a_{λ}, $a_{\dot\lambda}$ (Spinvektoren),
2. Stufe	$a_{\lambda\mu}$, $a_{\dot\lambda\dot\mu}$, $a_{\dot\lambda\mu} \rightleftarrows$ Weltvektor a_k,
3. Stufe	$a_{\lambda\mu\nu}$, $a_{\dot\lambda\dot\mu\dot\nu}$, $a_{\lambda\mu\dot\nu}$, $a_{\dot\lambda\dot\mu\nu}$,
4. Stufe	$a_{\lambda\mu\nu\varrho}$, $a_{\dot\lambda\dot\mu\dot\nu\dot\varrho}$, $a_{\lambda\mu\nu\dot\varrho}$, $a_{\dot\lambda\dot\mu\dot\nu\dot\varrho}$, $a_{\dot\lambda\mu\dot\varrho\sigma} \rightleftarrows$ Welttensoren a_{kl}.

Es sei noch bemerkt, daß man auch den Spinoren 2. Stufe $a_{\lambda\mu}$ und $a_{\dot\lambda\dot\mu}$ Welttensoren entsprechen lassen kann, und zwar alternierende „selbstduale" F_{kl}, indem man etwa setzt:

$$a^{\alpha}_{\beta\dot\lambda\dot\mu} = \delta^{\alpha}_{\beta} . a_{\dot\lambda\dot\mu},$$

woraus folgt

$$a_{\dot\lambda\dot\mu} = \tfrac{1}{2}\, a^{\alpha}_{\alpha\dot\lambda\dot\mu},$$

und indem man dann zu $a_{\alpha\beta\dot\lambda\dot\mu}$ das entsprechende F_{kl} bildet.

Weiter sei noch bemerkt, daß man sich immer auf solche Spintensoren beschränken kann, welche in allen punktierten und auch in allen unpunktierten Indices symmetrisch sind, weil sich aus diesen mit Hilfe von ε- oder δ-Symbolen (s. u.) alle anderen linear zusammensetzen.

§ 3. **Invariantentheorie der Spinoren.**

Wir betrachten ein System von binären Vektoren und Tensoren, vorläufig ohne punktierte Indices. Alle In- und Kovarianten dieses Systems bei der Gruppe (4) erhält man nach einem bekannten Satz der binären Invariantentheorie („erster Fundamentalsatz der symbolischen Methode") so: Man schreibt alle Indices der Tensoren zunächst unten, und bildet Ausdrücke wie

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\gamma\delta}\,a_{\alpha\beta\gamma}\,b_{\delta\lambda\mu}\ldots,\quad \text{wo} \begin{cases} \varepsilon^{12} = 1, & \varepsilon^{21} = -1, \\ \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \end{cases}$$

ist. Die Rechnungsregeln für die ε-Symbole sind:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} \varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}, \\ \varepsilon^{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\gamma\delta} + \varepsilon^{\beta\gamma}\,\varepsilon^{\alpha\delta} + \varepsilon^{\gamma\alpha}\,\varepsilon^{\beta\delta} = 0, \\ \varepsilon^{\alpha\beta}\,u_{\alpha\beta\gamma} + \varepsilon^{\alpha\beta}\,u_{\gamma\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta}\,u_{\beta\gamma\alpha} = 0. \end{cases}$$

Eine andere etwas kürzere, Schreibart für die Invarianten erhält man, wenn man die Vorschrift (2) zum Hochziehen der

Indices benutzt und die ε-Symbole wegschafft mittels:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = a_{\alpha}{}^{\alpha} = -a^{\alpha}{}_{\alpha}\ ^{1)}.$$

Die Rechnungsregeln, die man jetzt braucht, sind schwerer zu merken wie (6) (aus denen aber folgen):

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} u_{\alpha}{}^{\alpha} = -u^{\alpha}{}_{\alpha} \\ u^{\beta}{}_{\beta\alpha} = u^{\beta}{}_{\alpha\beta} - u_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta}. \end{cases}$$

Kommen nun noch punktierte Indices vor, so ist zu beachten, daß die Transformationen (1) und (1) algebraisch völlig unabhängig sind, und daß demnach die Invarianz eines Gleichungssystems zwischen binären Vektoren sich ausdrückt durch die Forderung der Invarianz bei zwei unabhängigen Gruppen, deren eine nur auf die punktierten, und deren andere nur auf die unpunktierten Indices operiert. Es sind also genau dieselben invarianten Operationen zulässig wie vorhin, nur müssen sie sich entweder auf die punktierten, oder auf die unpunktierten Indices beziehen. D. h., ein hochgezogener, punktierter Index bleibt punktiert, und summiert wird nur über zwei punktierte oder zwei unpunktierte Indices.

Soll ein Gleichungssystem auch bei Spiegelungen invariant sein, so muß es die Ersetzung aller $a^{\dot{\mu}\nu}$ durch $a^{\dot{\nu}\mu}$ und aller ξ_{μ} durch $\bar{\xi}_{\dot{\mu}}$ (oder Größen, die sich ebenso transformieren) gestatten.

§ 4. Die Diracsche Wellengleichung.

Die Diracsche Wellengleichung des Elektrons lautet nach Multiplikaton mit dem Diracschen Γ_0 so:

$$\text{(8)} \qquad \frac{1}{c}\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \Phi_0\right)\psi + \sum_{1}^{3} s'_r\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_r} + \Phi_r\right)\psi + mc\,\Gamma_0\,\psi = 0\ ^{2)}$$

wo die s'_r und Γ_0 vierreihige Marrices sind, nämlich:

$$s'_r = \begin{pmatrix} s_r & 0 \\ 0 & -s_r \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

wo E die zweireihige Einheitsmatrix ist und die s_r die Paulischen

1) Der Grund, warum die noch kürzere und bequemere symbolische Faktorzerlegung der Tensoren hier vermieden wurde, besteht hauptsächlich in Schwierigkeiten bei der Bezeichnung der Differentiationssymbole, wo man nur schwer angeben kann, auf welche Größen sie wirken sollen.

2) Der Unterschied gegen Weyl § 39, S. 172 in dem Glied mit Φ_0 rührt daher, daß wir x, y, z, t und nicht x, y, z, ict als Koordinaten benutzen; unser Vektor Φ ist reell und kontragredient zu den Koordinaten und unser Φ_0 ist $= ci$ mal dem Weylschen.

Martices

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind. Wir bezeichnen die ersten beiden Komponenten der Diracschen Wellenfunktion ψ mit $\psi_{\dot{1}}$, $\psi_{\dot{2}}$; die letzten beiden (die sich konjugiert-komplex und kontragredient zu den ersten transformieren) mit χ^1, χ^2, und spalten (8) dementsprechend in zwei Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{h}{i}\dfrac{\partial}{\partial t} + \Phi_0\right)\psi + \sum\limits_1^3 s_r\left(\dfrac{h}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_r} + \Phi_r\right)\psi + mc\chi = 0. \\ \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{h}{i}\dfrac{\partial}{\partial t} + \Phi_0\right)\chi - \sum\limits_1^3 s_r\left(\dfrac{h}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_r} + \Phi_r\right)\chi + mc\psi = 0. \end{cases}$$

Führen wir für $\dfrac{h}{i}\dfrac{\partial x^k}{\partial} + \Phi_k$ die Abkürzung a_k ein, so haben wir in der ersten Gleichung die Größe

$$\frac{1}{c}a_0 + \sum_1^3 s_r a_r$$

auszuwerten. Sie ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & \dfrac{1}{c}a_0 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^{\dot{1}1} & -a^{\dot{2}1} \\ -a^{\dot{1}2} & -a^{\dot{2}2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a^{\dot{1}1} & a^{\dot{2}1} \\ a^{\dot{1}2} & a^{\dot{2}2} \end{pmatrix}.$$

Ebenso tritt in der zweiten Gleichung der Ausdruck

$$\frac{1}{c}a_0 - \sum_1^3 s_r a_r = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}a_0 - a_3 & -a_1 + ia_2 \\ -a_1 - ia_2 & \dfrac{1}{c}a_0 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^{\dot{1}1} & -a^{\dot{1}2} \\ -a^{\dot{2}1} & -a^{\dot{2}2} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} a^{\dot{1}1} & a^{\dot{1}2} \\ a^{\dot{2}1} & a^{\dot{2}2} \end{pmatrix}$$

auf. Daher schreiben sich die Diracschen Gleichungen so:

$$\begin{cases} -a^{\dot{\lambda}\mu}\psi_{\dot{\lambda}} + mc\chi^\mu = 0 \\ -a_{\dot{\mu}\lambda}\chi^\lambda + mc\psi_{\dot{\mu}} = 0 \end{cases}$$

oder wenn wir noch die Indices der χ herunterziehen und für die $a_{\dot{\lambda}\mu}$ ihre Bedeutung einsetzen:

$$(9) \qquad \begin{cases} -\left(\dfrac{h}{i}\partial^{\dot{\lambda}}{}_{\mu} + \Phi^{\dot{\lambda}}{}_{\mu}\right)\psi_{\dot{\lambda}} + mc\chi_\mu = 0 \\ \left(\dfrac{h}{i}\partial_{\dot{\mu}}{}^{\lambda} + \Phi_{\dot{\mu}}{}^{\lambda}\right)\chi_\lambda + mc\psi_{\dot{\mu}} = 0 \end{cases}$$

Die Herleitung der Wellengleichung 2. Ordnung

$$h^2 \Box \chi_\nu = -\tfrac{1}{2} h^2 \partial^{\dot\lambda\mu} \partial_{\dot\lambda\mu} \chi_\nu = m^2 c^2 \chi_\nu \qquad (\text{im Fall } \Phi_k = 0) \tag{10}$$

(und ebenso für ψ) aus der Diracschen geschieht, indem man die Identität (7) benutzt, so:

$$\partial^{\dot\lambda\mu} \partial_{\dot\lambda\mu} \chi_\nu = \partial^{\dot\lambda\mu} \partial_{\dot\lambda\nu} \chi_\mu - \partial^{\dot\lambda}{}_\nu \partial_{\dot\lambda}{}^\mu \chi_\mu = -2 \partial^{\dot\lambda}{}_\nu \partial_{\dot\lambda}{}^\mu \chi_\mu$$
$$= + \frac{2mci}{h} \partial^{\dot\lambda}{}_\nu \psi_{\dot\lambda} = \frac{2 m^2 c^2 i^2}{h^2} \chi_\lambda.$$

§ 5. Die möglichen Lorentzinvarianten Wellengleichungen.

Von einer Wellengleichung für das Elektron haben wir zu verlangen, daß sie in den auftretenden Wellenfunktionen ψ linear sei, und daß sie die Ableitung $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ oder $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ linear auch die übrigen Ableitungen von derselben und niedrigeren Ordnung ausdrückt, mit Koeffizienten, die noch vom Feld anhängen dürfen. Hat die Wellenfunktion ψ zwei Komponenten ψ_1, ψ_2, so muß auch die Wellengleichung aus zwei Komponenten bestehen.

Verlangt man außerdem noch, daß sie von erster Ordnung sein soll, so kommt offensichtlich nur

$$\partial_{\dot\lambda\mu} \psi^\mu + c_{\dot\lambda\mu} \psi^\mu = 0$$

in Betracht, wo die $c_{\dot\lambda\mu}$ vom Feld abhängen dürfen. Für „kein Feld" muß $c_{\dot\lambda\mu} = 0$ werden, und man erhält das eine Paar der Diracschen Gleichungen mit $m = 0$.

Läßt man vier ψ-Komponenten m, von denen die ersten beiden sich nach (1), die letzten beiden nach ($\bar{1}$) transformieren sollen, so erhält man als Möglichkeiten:

$$\begin{cases} \partial_{\dot\lambda\mu} \psi^\mu + b_{\dot\lambda\mu} \psi^\mu + c^{\dot\sigma}_{\mu} \psi_{\dot\sigma} = 0 \\ \partial_{\dot\lambda\mu} \psi^{\dot\lambda} + e_{\dot\lambda\mu} \psi^{\dot\lambda} + f^{\varrho}_{\mu} \psi_\varrho = 0. \end{cases}$$

Für „kein Feld" bleibt für $c^{\dot\lambda}_{\mu}$ und f^{ϱ}_{μ} nur je ein Vielfaches der Einheitsmatrix übrig, und man erhält die Diracschen Gleichungen, wenn man diesen Vielfachen entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Für die Feldabhängigkeit der b, c, e, f sind natürlich mehr Möglichkeiten als die Diracsche allein.

Läßt man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu, mit nur zwei Komponenten der Wellenfunktion, so wird die Anzahl der Möglichkeiten noch viel größer: es sind die folgenden Glieder in der Wellengleichung möglich:

$$\Box \psi^{\mu} + b_{\sigma}^{\dot{\lambda}\varrho\mu} \partial_{\dot{\lambda}\varrho} \psi^{\sigma} + c_{\lambda}^{\mu} \psi^{\lambda} = 0.$$

(Das denkbare $\partial^{\varrho\dot{\mu}} \partial_{\dot{\varrho}\nu} \psi^{\nu}$ läßt sich durch $\Box \psi^{\mu}$ ausdrücken: vgl. § 4, Schluß.)

Über den Einfluss von Fremdionen auf die photochemischen Vorgänge in Alkalihalogeniden.

Von

A. Smakula, Göttingen.

Vorgelegt von R. W. Pohl in der Sitzung vom 28. Juni 1929.

Man kann Alkalihalogenide in gleicher Weise durch Korpuskularstrahlen, durch große Lichtquanten oder durch Erhitzung in Alkalimetalldampf verfärben. Die Dissertation von Ottmer[1]) hat vor einiger Zeit das bisher über die „Fremdfärbung erster Art“ [2]) Bekannte zusammengestellt.

Ottmer zitiert dabei unter anderen die Angabe P. L. Baileys[3]), daß die Verfärbung der Alkalihalogenide nicht an die spurenweise Anwesenheit fremder Moleküle gebunden ist und erwähnt, diese Behauptung durch Benutzung von Präparaten sehr verschiedenen Reinheitsgrades bestätigt zu haben.

Ebenso wie Ottmer betont auch Przibram[4]), daß die Verfärbung der Alkalihalogenide von der Anwesenheit der Fremdionen unabhängig sei. Gegen diese Angabe der drei genannten Autoren sind uns jedoch erhebliche Bedenken entstanden, und zwar aus zwei Gründen:

1. Es sind hier im Laufe der Jahre mehrfach Alkalihalogenidphosphore durch Röntgenlicht angefärbt worden. Viele dieser Phosphore zeigten eine viel tiefere Verfärbung als man z. B. je an natürlichen NaCl-Kristallen beobachtet.

2. Die Verfärbung der Alkalihalogenidkristalle durch große Lichtquanten wird doch wohl heute von allen Seiten als der gleiche photochemische Vorgang angesehen, den man im Fall der Silberhalogenide als photographischen Elementarprozeß bezeichnet. Es

---

1) R. Ottmer, Zs. f. Phys. **46**, 798, 1928.
2) R. Pohl und E. Rupp, Ann. d. Phys. **81**, 1161, 1926.
3) P. L. Bailey, Phys. Rev. **24**, 495, 1924.
4) L. Przibram, Wiener Ber. **135**, 213, 1926.

ist allgemein bekannt, in welch entscheidender Weise der photographische Elementarprozeß in den Silberhalogeniden an eine Mitwirkung fremder Ionen und Moleküle geknüpft ist. Diese fremden Moleküle und Ionen scheinen dabei eine doppelte Rolle zu spielen:

1. Sie können den Elementarprozeß begünstigen,
2. Sie stabilisieren die photochemischen Reaktionsprodukte.

Bei dieser Sachlage habe ich die rein experimentelle Aufgabe in Angriff genommen, den Einfluß von Fremdionenzusätzen auf die „Fremdfärbung erster Art" der Alkalihalogenidkristalle zu untersuchen. Das Kristallmaterial war genau so wie die hier im Institut eingehend untersuchten Phosphore hergestellt worden. Zur Verfärbung wurde Röntgenlicht von 200 k Volt Betriebsspannung (Wolfram Antikathoden) benutzt. Alle im Späteren genannten Bestrahlungszeiten beziehen sich auf eine Strombelastung der Röntgenröhren von 4 Milliampere und 40 cm Fokusabstand. Ich möchte nicht unterlassen, Herrn Oberingenieur Daumann der Fa C. H. F. Müller A.-G. in Hamburg für seine ständige Hilfe herzlichen Dank zu sagen.

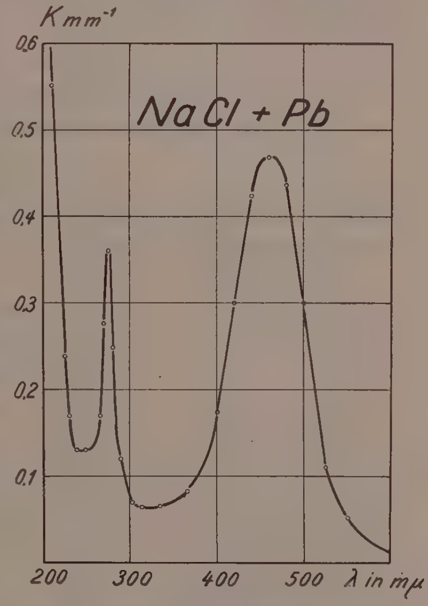


Abb. 1. NaCl + 0,0025 Molprozent Pb, 4 Stunden mit Röntgenlicht bestrahlt.

Die Meßanordnung bestand wiederum aus einem lichtelektrischen Photometer mit doppelter spektraler Zerlegung. Ich habe mich zunächst darauf beschränkt, lediglich im Gebiet des Absorptionsmaximums bei der Wellenlänge 460 mμ die Absorptionskonstante zu bestimmen. Das war nach den Vorversuchen zulässig [1]), denn

1) Bei Ag-haltigen NaCl-Phosphoren treten neben den oben genannten Banden regelmäßig noch durch Einwirkung des Röntgenlichtes neue Banden bei 275 mμ und 330 mμ auf. Diese Banden liegen in KCl-Phosphoren bei 285 mμ und 350 mμ. Außerdem tritt noch eine Bande bei 460 mμ auf. Die Ag-Halogenidphosphore zeichnen sich ebenfalls durch besonders komplizierte Absorptionsspektra aus. Man vergleiche die Arbeit von M. Forro in Zs. f. Phys.

Deswegen werde ich die Messungen an NaCl und KCl-Phosphoren mit Ag-

die Kurvenform der Absorptionsbande des gelb verfärbten NaCl-Kristalls wird durch die Anwesenheit der Fremdionen nicht geändert. Als Beleg gebe ich in Abb. 1 (S. 111) die Absorptionskurve eines Pb-haltigen NaCl-Kristalls, in dessen Schmelzfluß 0,0025 Mol-Prozent Fremdionen zugesetzt worden waren. Man sieht den charakteristischen Kurvenverlauf wie er insbesondere durch Messungen Gyulais[1]) ermittelt worden ist und daran anschließend bei 275 mμ die erste von Pb herrührende Bande.

Die Konzentrationsangaben bedeuten Mol-Prozente im Schmelzfluß. Die Meßergebnisse sind graphisch in der Abb. 2 zusammengestellt. Als Ausgangsmaterial für die Kristallherstellung habe ich de Haëns reine Reagenzien mit Analysenschein benutzt. Trotz der im chemischen Sinne großen Reinheit dieser Ausgangspräparate läßt ihre Reinheit im optischen Sinne noch zu wünschen übrig. Ich brauche lediglich auf eine Arbeit von Hilsch[2]) zu verweisen, in der Beispiele für die Absorptionsspektra dieser de Haënsschen NaCl-Präparate mitgeteilt sind. Nach dem optischen Befund besitzen also auch die synthetischen Kristalle ohne absichtlichen Fremdionenzusatz sicher noch eine merkliche Beimengung gitterfremder Bausteine. Es ist daher bestimmt nur eine Annäherung, wenn ich die Messung an diesen Kristallen ohne Zusatz dem Nullpunkt der Abszisse statt einem weiter rechts gelegenen Punkte der Abszisse zugeordnet habe.

Die Abhängigkeit der Verfärbung vom Fremdionenzusatz ist stets an drei Kristallschichten, die von einem Kristall abgespalten wurden, untersucht worden. Diese Kristalle wurden ½, 2 bezw. 8 Stunden der Einwirkung des Röntgenlichtes ausgesetzt.

Alle Messungen zeigen, daß die im Absorptionsmaximum erzielbare Absorptionskonstanten in ganz entscheidender Weise vom Fremdionengehalt des Kristalls bestimmt werden. In allen Meßreihen erreicht die Verfärbbarkeit des Kristalls durch Röntgenlicht bei der Konzentration von einigen Hundertstel Mol-Prozent ein ganz ausgesprochenes Maximum[3]). Nach diesen Meßergebnissen muß man ernste Zweifel aussprechen, ob ein NaCl-Kristall bezw. KCl ohne Fremdionen überhaupt durch Röntgenlicht verfärbt werden

---

Zusatz erst später mitteilen, obwohl auch bei ihnen die Abhängigkeit der Verfärbung von der Konzentration die gleiche ist wie in den 4 in Figur 2 abgebildeten Beispielen.

1) Z. Gynlai, Zs. f. Phys. **33**, 251, 1925. **35**, 411, 1925. W. Flechsig, **36**, 605, 1926.

2) R. Hilsch, Zs. f. Phys. **44**, 421, 1927.

3) Diese Abhängigkeit der Verfärbung vom Fremdionenzusatz ist auch bei KCl-Kristallen vorhanden.

kann. Leider besteht zur Zeit keine Möglichkeit, den Reinheitsgrad der Ausgangsmaterialien nennenswert zu verbessern. Es läßt sich nur eine Tatsache anführen, die die Berechtigung des eben ausgesprochenen Zweifels stützt. Man weiß, daß gute natürliche NaCl- sowie KCl-Kristalle, wenn auch nicht im chemischen, so doch im

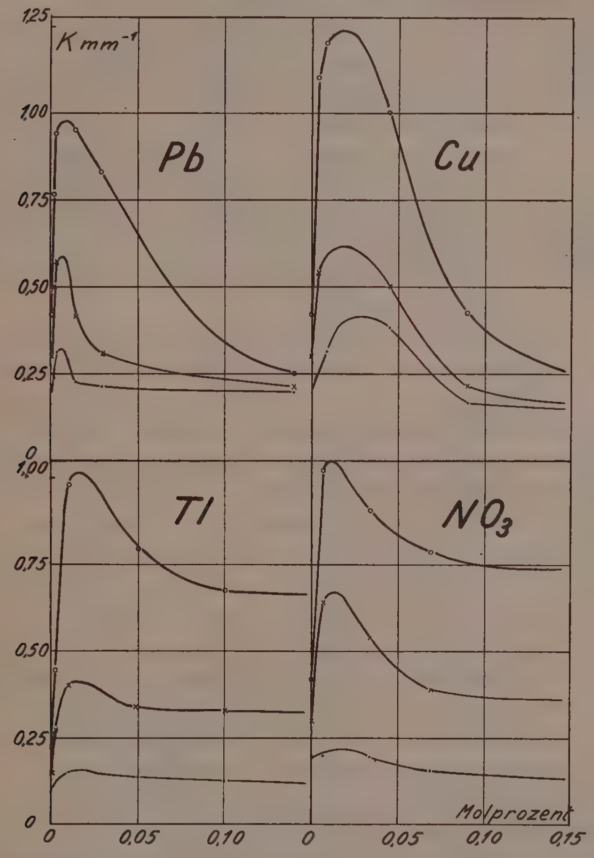


Abb. 2. Die Abhängigkeit der Verfärbung des NaCl vom Fremdionen-Zusatz. Die Verfärbung des NaCl mit Tl-Zusatz ist in Wirklichkeit doppelt so groß, als in der Abbildung angegeben. Die drei in jedem Einzelbilde übereinander gezeichneten Kurven entsprechen jeweils Bestrahlungsdauern von 0.5, 2 und 8 Stunden.

optischen Sinne erheblich reiner sind als die besten synthetischen. Bei dem zweifellos sehr langsamen Wachstum der natürlichen Kristalle sind die in ihnen enthaltenen Verunreinigungen nicht als fremde Bausteine in das Gitter eingefügt, sondern bildlich gespro-

chen, in einzelnen Hohlräumen abgelagert. Ich kann in diesem Zusammenhang auf die überzeugenden Versuche von Hilsch[1]) verweisen. Diese natürlichen Kristalle großer optischer Reinheit bleiben in ihrer Verfärbung weit hinter der der reinsten synthetischen Kristalle zurück. Ich bin selbst bei Einwirkungsdauern des Röntgenlichts von 8 Stunden nicht über die Absorptionskonstante von $^1/_{10}$ mm^{-1} (bei einigen natürlichen KCl-Kristallen sogar nicht über $^1/_{100}$ mm^{-1}) hinausgekommen. Dieser Wert liegt 5 mal (bezw. 50 mal) tiefer als bei den reinsten synthetischen Präparaten. Soweit der empirische Tatbestand.

Zur Deutung dieser Ergebnisse muß man folgende Punkte in Betracht ziehen. 1. Die Fremdionen können die Begünstigung der Röntgenlichtabsorption hervorrufen. Gegen diese Deutung kann ich anführen, daß NO_3-Ionen praktisch gleich wirken wie Tl, Pb oder U-Ionen, obwohl diese Metalle Röntgenlicht von 200 k Volt besonders stark absorbieren.

2. Man kann an verschiedene Beträge rein mechanischer Gitterstörungen im Sinne von Smekal[2]) und Przibram[3]) denken. Für diese Auffassung läßt sich anführen, daß synthetische Kristalle cet. par. um so stärker verfärbt werden, je rascher man sie aus dem Schmelzfluß hergestellt hat. Schnell gezüchtete Kristalle werden sicher unvollkommenere Gitter haben, aber andererseits nehmen die Kristalle bei schnellem Wachstum sicher auch größere Mengen von Fremdionen aus dem Schmelzfluß auf. Tatsächlich habe ich gefunden, daß synthetische NaCl-Kristalle ohne Zusatz, die rasch aus dem Schmelzfluß hergestellt und rasch abgekühlt wurden, sich zweimal so stark verfärben als die langsam gezüchteten Kristalle.

3. Es ist anzuführen, daß der Verfärbung eines Kristalls durch Röntgenlicht eine Entfärbung durch Wärmebewegung entgegenwirkt[4]). Es ist denkbar, daß diese thermische Entfärbung durch einen bestimmten Fremdionengehalt vermindert wird. Nach den bisherigen Beobachtungen ist jedoch eine solche Wirkung sehr zweifelhaft. Denn natürliche Kristalle, die durch Röntgenlicht verfärbt waren, sind viel stabiler als synthetische. Nach Lage der Dinge erscheint es noch verfrüht, den Einfluß der Fremdionen auf den photographischen Elementarprozeß der Alkalihalogenide im Sinne einer bestimmten Vorstellung zu deuten. Ich habe statt

---

1) R. Hilsch, Zs. f. Phys. **44**, 421, 1927.
2) A. Smekal, Zs. f. Phys. **26**, 707, 1925.
3) K. Przibram, Wiener Ber. **135**, 213, 1926.
4) B. Zeckert, Wiener Ber. **136**, 337, 1927.

dessen das Beobachtungsmaterial zu erweitern versucht und die Frage in Angriff genommen, wie weit sich das übrige optische und thermische Verhalten der durch Röntgenlicht verfärbten Alkalihalogenide (Halbwertsbreite, Erregung im Sinne von Gudden und Pohl, Entfärbung durch Wärme und Licht) vom Fremdionengehalt als abhängig erweist. Die Ergebnisse dieser weiteren Untersuchungen werden in der Zs. f. Physik erscheinen.

Zusammenfassung: Die Arbeit zeigt, daß die Verfärbung der Alkalihalogenide durch große Lichtquanten (Fremdfärbung erster Art) in entscheidender Weise durch die Anwesenheit von Fremdionen im Gitter bestimmt wird.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Pohl für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit herzlich danken.

Erstes Physikalisches Institut der Universität Göttingen,
Juli 1929.

Bemerkungen zur arithmetischen Theorie der binären quadratischen Formen.

Von

Werner Weber in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. November 1929 durch E. Landau.

Die folgenden Bemerkungen sollen an zwei besonders wichtigen Beispielen zeigen, in welchem Maße die arithmetische Theorie binärer quadratischer Formen mit ganzen rationalen Koeffizienten durch idealtheoretische Methoden an Durchsichtigkeit gewinnt. Einfache Tatsachen aus der Theorie der quadratischen Zahlkörper werden dabei ohne Beweis angegeben.

Eine quadratische Form bedeutet im folgenden immer eine primitive binäre quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten und nichtquadratischer Diskriminante. Jeweils kommt nur eine einzige Diskriminante in Frage; sie wird mit

$$D = k^2 \Delta$$

($k > 0$ ganz, Δ Stammdiskriminante) bezeichnet. Formenklassen sind im Falle $D < 0$ immer positiv-definit gemeint.

Ferner bedeutet ein Modul in einem quadratischen Zahlkörper eine additive Abelsche Gruppe aus ganzen oder gebrochenen Körperzahlen und mit unverkürzbarer zweigliedriger Basis; die letztere wird durch eckige Klammern ausgedrückt.

§ 1.

Ein für die meisten tieferen Untersuchungen über quadratische Formen grundlegender Satz ist der, daß es in jeder Klasse eine Form gibt, deren Anfangskoeffizient positiv und zu einer beliebig vorgegebenen ganzen rationalen Zahl q teilerfremd ist[1]. Der klassische Beweis von Dirichlet[2] arbeitet mit einigen ziemlich

1) Nur eine andere Ausdrucksweise ist es, zu sagen, daß durch jede Form eine zu q teilerfremde natürliche Zahl eigentlich darstellbar ist.

2) Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4. Aufl. (1894), § 93, S. 234.

mühsamen Teilbarkeitsbetrachtungen. Mittels der auf Dedekind zurückgehenden Zuordnung der Formenklassen zu den Modulklassen der quadratischen Zahlkörper[1]) kann man den Satz folgendermaßen in helleres Licht rücken:

Der Formenklasse K von der Diskriminante $D = k^2 \Delta$ ist im quadratischen Zahlkörper mit der Grundzahl Δ eine Modulklasse M zugeordnet; die gemeinsame Ordnung[2]) $\mathfrak{n}$ aller Moduln aus M hat den Führer k. In M gibt es jedenfalls ein Ideal $\mathfrak{r}$ in der Ordnung $\mathfrak{n}$. Der Bereich aller derjenigen Ideale in der Ordnung $\mathfrak{n}$, die zugleich (im Dedekindschen Sinne)[2]) „von der Ordnung $\mathfrak{n}$" (d. h. in keiner umfassenderen Ordnung mehr Ideal) sind, werde mit $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ bezeichnet[3]). Das zu $\mathfrak{r}$ konjugierte Ideal $\bar{\mathfrak{r}}$[4]) läßt sich, wie nun gezeigt werden soll, durch Multiplikation mit einem zweiten Ideal $\mathfrak{x}$ aus dem Bereiche $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$, das zu dem Ideal $q\mathfrak{n}$ (in bezug auf den Ring $\mathfrak{n}$) teilerfremd ist[5]), in ein Hauptideal $\alpha\mathfrak{n}$ verwandeln, wobei die Zahl α positive Norm hat. Zunächst soll nachgewiesen werden, daß in dieser Behauptung der obige Satz über quadratische Formen steckt.

Jedes zu $q\mathfrak{n}$ teilerfremde Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{n}$, das dem Bereich $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ angehört, hat eine zu q teilerfremde Norm[6]). Das kann man so beweisen: Wegen $\mathfrak{a} + q\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ ist auch $\bar{\mathfrak{a}} + q\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, da $\mathfrak{n}$ zu sich selbst konjugiert ist; demnach ist $q\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ und daher nach einem für alle Ringe mit Einheitselement gültigen Satze[7]) auch zu dem Produkt $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = N(\mathfrak{a})\mathfrak{n}$[8]) teilerfremd, somit q zu $N(\mathfrak{a})$ teilerfremd.

---

1) Dirichlet-Dedekind, a. a. O., § 187, S. 656 f.

2) Über den Begriff der Ordnung eines Moduls und den hernach auftretenden allgemeineren Begriff des Modulquotienten vgl. Dedekind, a. a. O., § 170, S. 504 f. Wie bei Dedekind, wird die Ordnung eines Moduls $\mathfrak{m}$ künftig mit $\mathfrak{m}^0$ bezeichnet.

3) Hinsichtlich der Bedeutung des Bereiches $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ für die arithmetische Theorie der binären quadratischen Formen verweise ich auf meine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit *Idealtheoretische Deutung der Darstellbarkeit beliebiger natürlicher Zahlen durch quadratische Formen.*

4) Überhaupt sollen Querstriche stets den Übergang zum Konjugierten andeuten.

5) D. h. es ist $\mathfrak{x} + q\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$.

6) Unter der Norm $N(\mathfrak{a})$ eines Moduls $\mathfrak{a}$ ist nach Dedekind (a. a. O., § 187, S. 643) der Betrag der Determinante einer Linearsubstitution mit rationalen Koeffizienten zu verstehen, die eine zweigliedrige Modulbasis der Ordnung von $\mathfrak{a}$ in eine solche von $\mathfrak{a}$ überführt.

7) Vgl. E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern,* Math. Ann. 96 (1926), § 4, Satz 4γ.

8) Der Beweis dieser Gleichung findet sich bei Dedekind, a. a. O., § 187, S. 644 f.

Im vorliegenden Fall ist also die Zahl $N(\mathfrak{x})$ teilerfremd zu q; sie werde mit t bezeichnet. Wie jeder Modul, so gestattet auch $\mathfrak{x}$ eine Basisdarstellung von der Gestalt

$$\mathfrak{x} = m[1, \omega], \tag{1}$$

worin m die kleinste in $\mathfrak{x}$ vorkommende positive rationale Zahl und ω von der Gestalt $r + s\sqrt{\Delta}$ mit rationalen r, s und $s > 0$ ist; dabei soll $\sqrt{\Delta}$ den positiven bzw. positiv-imaginären Wurzelwert darstellen. Da $\mathfrak{x}$ wegen der Idealeigenschaft das Element $N(\mathfrak{x}) = t$ enthält[1]), so ist $\frac{t}{m}$ ganz. Die Zahl ω genügt einer Gleichung

$$a\omega^2 - b\omega + c = 0,$$

in der a, b, c teilerfremde ganze rationale Zahlen sind und $a > 0$ ist. Man beachte nun, daß $\mathfrak{x}$ seiner Konstruktion gemäß in der zur Klasse des Moduls $\bar{\mathfrak{r}}$ inversen Modulklasse, d. h. in M liegt. Infolgedessen liegt die Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 \tag{2}$$

in der Klasse K: denn gerade in dieser Weise wurde bei Dedekind die Zuordnung zwischen Modul- und Formenklassen getroffen. Durch Übergang zur Norm folgt aus (1)

$$t = \frac{m^2}{a},$$

$$a\left(\frac{t}{m}\right)^2 = t,$$

und da $\frac{t}{m}$ ganz ist, so ist a (als Teiler von t) relativ prim zu q.

Das enthält den zu Beginn des Paragraphen ausgesprochenen Satz: die Form (2) hat die dort geforderten Eigenschaften.

§ 2.

Die Aufgabe ist also völlig auf die Frage nach der Existenz des Ideals $\mathfrak{x}$ zurückgeführt. Um diese Frage bejahen zu können, ist es zweckmäßig, den bekannten analogen Satz für die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ auf eine beliebige Ordnung $\mathfrak{n}$ statt $\mathfrak{o}$ auszudehnen, und zwar in folgender schärferen Fassung:

Satz 1: *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $\mathfrak{n}$, das Ideal $\mathfrak{a}$ sogar zum Bereiche $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ gehörig, so gibt es in $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ ein zu $\mathfrak{b}$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{x}$*

---

1) Denn es ist $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}} = N(\mathfrak{x})\mathfrak{n}$, also $N(\mathfrak{x})$ Element von $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}$, also (da $\bar{\mathfrak{x}}$ Untermenge von $\mathfrak{n}$ ist) Element von $\mathfrak{x}\mathfrak{n} = \mathfrak{x}$.

von der Eigenschaft, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ *ein Hauptideal* $\alpha\mathfrak{n}$ *ist, wobei* α *positive Norm hat*[1]).

Setzt man $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{b} = q\mathfrak{n}$, so sieht man, daß sich im obigen Falle die ganze Behauptung auf den Nachweis des Satzes 1 reduziert.

Unter Weglassung der Bedingung $N(\alpha) > 0$ ist dieser Satz im wohlbekannten Spezialfall $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$ auf wesentlich verschiedene Arten bewiesen worden. Der bei HECKE[2]) ausgeführte Beweis gründet sich auf die eindeutige Zerlegbarkeit der Ideale in Primideale. Etwas Entsprechendes gilt im vorliegenden Fall einer allgemeinen Ordnung $\mathfrak{n}$ nicht, auch wenn man $\mathfrak{b}$ als zum Bereiche $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ gehörig annimmt[3]) und sich auf Ideale dieses Bereiches beschränkt[4]). HECKES Beweis ist infolgedessen einer Nachbildung nicht fähig. Wohl aber gilt dies für den älteren Beweis von DEDEKIND[5]). Dieser Beweis stellt im wesentlichen eine Anwendung der Tatsache dar, daß die gebrochenen Ideale in $\mathfrak{o}$ gegenüber der Multiplikation eine Gruppe bilden; und es ist nun sehr bemerkenswert, daß im quadratischen Zahlkörper zwar nicht für die sämtlichen gebrochenen Ideale einer beliebigen Ordnung $\mathfrak{n}$, die man etwa durch Aufnahme beliebiger zur Ordnung gehöriger Nenner zu den ganzen Idealen in $\mathfrak{n}$ definieren kann, wohl aber für die Moduln von der Ordnung $\mathfrak{n}$, die offenbar in derselben Weise aus den Idealen des Bereiches $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ hervorgehen, eine solche Gruppeneigenschaft besteht. Als Einheitselement tritt dabei die Ordnung $\mathfrak{n}$, als Inverses eines Moduls $\mathfrak{m}$ der im Ring aller ganzen und gebrochenen Körperzahlen gebildete Modulquotient $\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}$ auf. Die Gruppeneigenschaft dieser Moduln beruht im wesentlichen auf der Tatsache, daß für jeden solchen Modul $\mathfrak{m}$ die Gleichung

$$\mathfrak{m}\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}$$

besteht[6]), d. h. daß jede Ordnung eines quadratischen Zahlkörpers

1) Für den vorliegenden Zweck ist nur der Fall von Bedeutung, daß auch $\mathfrak{b}$ zum Bereiche $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ gehört (nämlich ein Hauptideal $q\mathfrak{n}$ mit ganzem rationalem q ist); der Beweis ist aber für diesen Spezialfall nicht einfacher zu führen.

2) *Theorie der algebraischen Zahlen* (1923), Kap. V, § 26, S. 97 f.

3) Vgl. oben Fußnote 1.

4) Den Beweis der letzteren Tatsache sowie verwandte Untersuchungen gedenke ich in einer späteren Arbeit zu veröffentlichen.

5) A. a. O., § 178, S. 558 f.

6) Hinsichtlich des Beweises vgl. DIRICHLET-DEDEKIND, a. a. O., § 187, S. 644 f.

in einer von DEDEKIND gelegentlich[1]) gebrauchten Bezeichnungsweise „umkehrbar“ ist. Der Modulquotient $\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m}''}{\mathfrak{m}}$ wird im folgenden im Anschluß an DEDEKIND[2]) mit $\mathfrak{m}^{-1}$ bezeichnet.

Auf Grund der Gruppeneigenschaft überträgt sich nun der DEDEKINDsche Beweis, indessen erst nach einigen nicht trivialen Abänderungen und Ergänzungen. Berücksichtigt man noch die Bedingung der positiven Norm, so nimmt der Beweis die nachstehende Gestalt an.

Hilfssatz 1: *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in der Ordnung $\mathfrak{n}$, das Ideal $\mathfrak{b}$ insbesondere zum Bereich $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ gehörig, und ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar, so gibt es in $\mathfrak{n}$ ein Ideal $\mathfrak{c}$ mit*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$ [3])

Beweis: Für den Modul

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$$

gilt[4])

$$\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{n},$$

zugleich

$$\mathfrak{n}\mathfrak{c} = (\mathfrak{n}\mathfrak{a})\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{c};$$

$\mathfrak{c}$ ist also Ideal in $\mathfrak{n}$. Zugleich wird

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{n} = \mathfrak{a}.$$

Hilfssatz 2: *Sind $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_r$ Ideale in $\mathfrak{n}$, das Ideal $\mathfrak{a}$ Element des Bereiches $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ und ist $\mathfrak{a}$ durch keines der Ideale $\mathfrak{c}_i$ teilbar, so gibt es in $\mathfrak{a}$ eine Zahl von positiver Norm, die in keinem der Ideale $\mathfrak{c}_i$ liegt.*

Beweis: Zunächst werde von der Bedingung der positiven Norm abgesehen. Im Falle $r = 1$ ist dann die Behauptung klar. Sie werde für den Fall, daß nur $r-1$ (statt r) Ideale $\mathfrak{c}_i$ gegeben sind, als richtig angenommen. Aus der Voraussetzung nebst Hilfs-

1) Im Briefwechsel mit FROBENIUS.

2) A. a. O., § 170, S. 506.

3) In dem besonders wichtigen Falle, daß auch $\mathfrak{a}$ zum Bereich $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ gehört, folgt dieser Satz leicht direkt aus der soeben erwähnten Gruppeneigenschaft. Zugleich gehört dann auch $\mathfrak{c}$ automatisch dem Bereich $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ an. Das damit gewonnene Ergebnis ist das eigentliche Analogon zu dem für die Hauptordnung gültigen Satz, daß „aus Teilbarkeit Produktdarstellung folgt“. Doch wird hernach die obige, allgemeinere Fassung benötigt.

4) Das Zeichen $\subseteqq$ soll bedeuten: „ist Untermenge von“; das Zeichen $\subset$: „ist echte Untermenge von“; das Zeichen $\supseteqq$: „ist Obermenge von“.

satz 1 ergibt sich zu jedem $\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Existenz eines Ideals $\mathfrak{b}_i$ in $\mathfrak{n}$, für welches [1])

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}_i$$

ist. Zu zeigen ist also nur, daß es eine Zahl gibt, die in $\mathfrak{a}$, aber in keinem der Produkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$ liegt.

Gibt es zunächst unter den $\mathfrak{b}_i$ ein Paar, etwa $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$, dessen größter gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{n}$ verschieden ist, so kann $\mathfrak{a}$ nicht durch $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ teilbar sein; denn sonst würde durch Multiplikation mit $\mathfrak{a}^{-1}$ folgen $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{n}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es also in $\mathfrak{a}$ eine Zahl β, die durch keines der Ideale $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2), \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3, \ldots, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_r$ teilbar ist, also erst recht durch keines der Ideale $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_r$.

Sind zweitens die $\mathfrak{b}_i$ paarweise teilerfremd, so ist [2]) jedes Ideal $\mathfrak{b}_i$ zum Produkt $\mathfrak{b}_i'$ der übrigen teilerfremd. Nun ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i'$ nicht durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$ teilbar; denn sonst würde wiederum durch Multiplikation mit $\mathfrak{a}^{-1}$ folgen $\mathfrak{b}_i' \subseteq \mathfrak{b}_i$, wegen der Teilerfremdheit von $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_i'$ also $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}_i$, gegen die Voraussetzung. Zu jedem Index i gibt es also eine Zahl β_i, die in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i'$, aber nicht in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$ liegt. Setzt man nun $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_r$, so ist β natürlich Element von $\mathfrak{a}$. Dagegen ist β durch keines der Ideale $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$ teilbar; denn für $i = 1, \ldots, r$ sind alle $\mathfrak{b}_j'$ mit $j \neq i$ teilbar durch $\mathfrak{b}_i$, also die zugehörigen β_j teilbar durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$, während β_i nicht in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$ liegt.

Durch Induktion ist also die Existenz einer Zahl β gezeigt, die in $\mathfrak{a}$, aber in keinem der Ideale $\mathfrak{c}_i$ liegt. Ist nun γ eine beliebige Körperzahl, so hat bekanntlich $\gamma + m$ für alle großen natürlichen Zahlen m positive Norm. Es sei nun n eine natürliche Zahl, die sowohl in $\mathfrak{a}$ wie auch in $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r$ vorkommt. Die Zahl $\beta + gn$ hat dann für alle natürlichen Zahlen g dieselbe Eigenschaft wie β, hat aber für große g positive Norm.

Hilfssatz 3: *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $\mathfrak{n}$, das Ideal $\mathfrak{a}$ überdies zum Bereich $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ gehörig, so gibt es in $\mathfrak{n}$ eine Zahl α von positiver Norm, für welche $\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \alpha\mathfrak{n} = \mathfrak{a}$ ist.*

Beweis: Ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$, so hat jede Zahl α aus $\mathfrak{a}$ mit positiver Norm die geforderten Eigenschaften. Ist $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{n}$, so ist zunächst $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, da andernfalls $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{n}$ folgen würde. Die (endliche) Menge aller Ideale $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq$

1) Das Zeichen $\cap$ deutet, wie üblich, die mengentheoretische Durchschnittsbildung an.

2) Siehe oben S. 117, Fußnote 7.

$\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ ist also nicht leer. Nach Hilfssatz 2 liegt in $\mathfrak{a}$ eine Zahl α von positiver Norm, die durch keines dieser Ideale $\mathfrak{c}$ teilbar ist. Das Ideal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\alpha\mathfrak{n}$ ist also von allen $\mathfrak{c}$ verschieden, und da es $\supseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\subseteqq \mathfrak{a}$ ist, so bleibt nur $\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\alpha\mathfrak{n} = \mathfrak{a}$ übrig.

Auf Grund des Hilfssatzes 3 erledigt sich Satz 1 rasch. Es werde eine Zahl α von positiver Norm gewählt, die in $\mathfrak{n}$ liegt und für die

(3) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\alpha\mathfrak{n} = \mathfrak{a}$$

ist. Wegen $\alpha\mathfrak{n} \subseteqq \mathfrak{a}$ gibt es, da $\alpha\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{a}$ Moduln von der Ordnung $\mathfrak{n}$ sind, infolge der Gruppeneigenschaft einen weiteren Modul $\mathfrak{x}$ mit

$$\alpha\mathfrak{n} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}^0 = \mathfrak{n}.$$

Für dieses $\mathfrak{x}$ wird nach (3)

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a},$$

durch Multiplikation mit $\mathfrak{a}^{-1}$ also (wegen $\mathfrak{n}(\mathfrak{b}+\mathfrak{x}) = \mathfrak{n}\mathfrak{b}+\mathfrak{n}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}+\mathfrak{x}$)

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{x} = \mathfrak{n}.$$

$\mathfrak{x}$ ist also ein zu $\mathfrak{b}$ teilerfremdes Ideal in der Ordnung $\mathfrak{n}$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Dem Zwecke einer Verwendung in § 4 dient der folgende Exkurs über die Zuordnung zwischen Formen und Idealen.

Zu der quadratischen Form

(2) $$a x^2 + b x y + c y^2$$

von der Diskriminante $D = k^2 \Delta$ bilde man im quadratischen Zahlkörper von der Grundzahl Δ den Modul

$$\mathfrak{m} = \left[a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right],$$

wobei $\sqrt{D}$ den positiven bzw. positiv-imaginären Wurzelwert bezeichnen soll. Wie man unschwer zeigt, ist $\mathfrak{m}$ Ideal in derjenigen Ordnung $\mathfrak{n}$ des Körpers, deren Führer k ist, gehört sogar dem oben definierten Idealbereich $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ an und hat die Norm $|a|$. Durch Multiplikation mit der Hauptordnung $\mathfrak{o}$ entsteht aus $\mathfrak{m}$ das klassisch gewordene Ideal in $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{M} = \left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right)$$

(runde Klammern bezeichnen eine Idealbasis), welches ebenfalls die Norm $|a|$ hat. $\mathfrak{m}$ heiße das der Form (2) zugeordnete Ideal in der Ordnung $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{M}$ das ihr zugeordnete Ideal in $\mathfrak{o}$.

In jeder der in betracht kommenden Formenklassen gibt es, wie z. B. in §§ 1 und 2 gezeigt wurde, eine Form, deren Anfangskoeffizient positiv und zu k teilerfremd ist. Es wird also keine Einschränkung bedeuten, daß Satz 4 und 5 (§ 4) nur mit Formen von dieser Beschaffenheit operieren. Erfüllt die vorgelegte Form (2) diese Bedingungen, so gibt es nach einem Satz von H. Weber[1]) keine natürliche Primzahl, die in beiden Basiselementen $a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}$ des zugeordneten Ideals in $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{o}$ (d. h. in allen Zahlen dieses Ideals) aufgeht. Ein Modul, dessen Elemente ganz, aber durch keine rationale Primzahl sämtlich teilbar sind, ist als primitiv bezeichnet worden. Das Primitivideal $\mathfrak{M}$ ist übrigens, da a seine Norm ist, im üblichen Sinne zu k teilerfremd.

Umgekehrt gilt der Satz, daß *jedes zu k teilerfremde Primitivideal $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{o}$ einer quadratischen Form mit positivem und zu k teilerfremdem Anfangskoeffizienten zugeordnet ist.* Dieser hernach anzuwendende Satz ist eine Folge der klassischen Theorie[2]). Trotzdem

---

1) *Lehrbuch der Algebra*, 2. Aufl., Bd. 3 (1908), § 97, Satz 6.

2) An der betreffenden Stelle bei H. Weber (a. a. O., § 97, Satz 5) ist der Satz in dieser Fassung weder formuliert noch bewiesen. Es wird lediglich zu einem zu k teilerfremden Primitivideal $\mathfrak{M}$ ein Zahlentripel a, b, c mit $a = N(\mathfrak{M})$ und $b^2 - 4ac = D$ konstruiert von der Beschaffenheit, daß die Zahl $\frac{b+\sqrt{D}}{2}$ in $\mathfrak{M}$ liegt. In Wahrheit gilt aber der schärfere Satz, daß die so konstruierten Zahlen a, b, c teilerfremd sind und daß das Ideal $\mathfrak{M}$ der quadratischen Form $ax^2 + bxy + cy^2$ zugeordnet ist. Den Beweis hat Fricke (*Lehrbuch der Algebra*, Bd. 3 (1928), II. Abschnitt, 3. Kapitel, § 6, S. 278 f.) nachgeholt. Doch fehlt bei H. Weber an dieser Feststellung nicht so viel, als es den Anschein hat; denn auf Grund der von ihm (§ 97, Satz 6) bewiesenen Tatsache, daß die Zahlen a und $\frac{b+\sqrt{D}}{2}$ keine rationale Primzahl zum gemeinsamen Teiler haben, kann man Frickes Beweis durch folgenden einfacheren ersetzen: 1. Die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right)$$

folgt daraus, daß das Ideal

$$\mathfrak{M}_1 = \left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right)$$

durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, andrerseits aber die Norm a hat. In der Gleichung

$$\left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right)\left(a, \frac{b-\sqrt{D}}{2}\right) = a\left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}, \frac{b-\sqrt{D}}{2}, c\right)$$

soll dem mehr rechnerischen Beweis von H. Weber und Fricke hier ein neuer, durchsichtigerer an die Seite gestellt werden, der auf meiner in Fußnote 3, S. 117 erwähnten Arbeit[1]) beruht; es geschieht dies auch, um zu zeigen, daß die Methoden und Ergebnisse jener Arbeit nicht nur auf Darstellungen von Zahlen durch quadratische Formen, sondern auch auf die einfacheren Zuordnungen zwischen den Formen selbst und den Idealen mit Vorteil angewandt werden können.

Nach W., Satz 24 gibt es im Bereich $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ ein Ideal $\mathfrak{m}$ mit

(4) $$\mathfrak{m}\mathfrak{o} = \mathfrak{M}.$$ [2])

Die der Modulklasse von $\mathfrak{m}$ entsprechende Formenklasse K hat die Diskriminante D, und wenn

(5) $$m x^2 + r x y + s y^2$$

eine beliebige quadratische Form aus K bezeichnet, so existieren nach W., Satz 2 zwei ganze rationale Zahlen x_0 und y_0 von der Beschaffenheit, daß die Gleichung

(6) $$N(\mathfrak{m}) = m x_0^2 + r x_0 y_0 + s y_0^2$$

besteht und daß dieser Darstellung im Sinne von W., Defini-

---

muß nämlich der Klammerfaktor auf der rechten Seite ein rationales Hauptideal sein, und da keine rationale Primzahl in a und $\frac{b+\sqrt{D}}{2}$ zugleich aufgeht, so ist dieser Faktor das Einheitsideal, mithin $\mathfrak{M}_1 \overline{\mathfrak{M}_1} = (a)$, $N(\mathfrak{M}_1) = a$. 2. Die Teilerfremdheit von a, b, c ergibt sich so: Hätten diese Zahlen einen Primfaktor p gemeinsam, so hätten Summe und Produkt der zueinander konjugierten Zahlen $\frac{b+\sqrt{D}}{2p}$ und $\frac{b-\sqrt{D}}{2p}$ ganzzahlige Werte, nämlich die Werte $\frac{b}{p}$ und $\frac{a}{p}\frac{c}{p}$; folglich wäre $\frac{b+\sqrt{D}}{2p}$ ganz, und die Zahlen a und $\frac{b+\sqrt{D}}{2}$ wären beide durch p teilbar.

1) Im folgenden mit „W." zitiert.

2) Ist $\mathfrak{M}$ ein beliebiges zu k teilerfremdes Ideal in der Hauptordnung, so gibt es schon nach Dedekind (*Über die Anzahl der Idealklassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers* (1877), § 5, Satz 2) ein Ideal $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{n}$, das die Gleichung (4) befriedigt; diese Eigenschaft kommt nämlich dem Ideal $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{n}$ zu. Daß dieses Ideal dem Bereich $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ angehört, wird in W. (Satz 24) bewiesen. Übrigens zeigt man leicht, daß jedes Ideal $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{n}$, das der Gleichung (4) genügt, im Ring $\mathfrak{n}$ zu dem Ideal $k\mathfrak{o}$ teilerfremd sein muß, daß also zufolge des Satzes 1 aus § 5 der genannten Arbeit von Dedekind nur ein solches Ideal existiert.

tion 1 das Ideal $\mathfrak{m}$ zugeordnet ist[1]). Die dabei zugrunde liegende Zuordnungsdefinition verläuft so: Einer Darstellung einer natürlichen Zahl n in der Gestalt

$$n = A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2,$$

wo A, B, C die Koeffizienten einer quadratischen Form von der Diskriminante D sind und wo ξ und η ganze rationale Zahlen bedeuten, wird das Ideal $A(\xi + \eta\bar{\Omega})[1, \Omega]$ in $\mathfrak{n}$ zugeordnet, worin Ω die Zahl $\frac{B+\sqrt{D}}{2A}$ bezeichnet. Nach W., Satz 3 geht dabei jeder gemeinsame Teiler von ξ und η zugleich in dem zugeordneten Ideal auf. Da $\mathfrak{m}$ als Untermenge von $\mathfrak{M}$ gewiß primitiv ist, sind also die Zahlen x_0 und y_0 zueinander teilerfremd. Mithin gibt es zwei weitere ganze rationale Zahlen u und v so, daß

$$x_0 v - y_0 u = 1$$

ist. Die unimodulare Linearsubstitution

$$(7) \qquad \begin{cases} x = x_0 X + u Y, \\ y = y_0 X + v Y \end{cases}$$

führt die Form (5) zufolge der Gleichung (6) in eine ebenfalls zu K gehörige Form

$$a X^2 + b X Y + c Y^2$$

mit

$$a = N(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{M})$$

über; wendet man die Substitution dagegen auf die speziellen Werte $x = x_0$, $y = y_0$ an, so entsteht $X = 1$, $Y = 0$. In der Ausdrucksweise von W. heißt das: Die Darstellung

$$(8) \qquad a = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \cdot 0 + c \cdot 0^2$$

geht aus der Darstellung (6) durch die „vollständige" lineare Substitution (7) hervor. Nach W., Satz 9 entspricht aber zwei Darstellungen (derselben natürlichen Zahl), die durch eine vollständige lineare Substitution von der Determinante 1 auseinander hervorgehen, dasselbe Ideal. Der Darstellung (8) ist also ebenfalls das Ideal $\mathfrak{m}$ zugeordnet; dies bedeutet aber, daß

1) Mit dem der Form (5) im vorhin eingeführten Sinne zugeordneten Ideal hat $\mathfrak{m}$ zunächst noch nichts zu tun.

$$\mathfrak{m} = a(1+0\bar{\omega})[1, \omega] = [a, a\omega] \quad \left(\omega = \frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)$$

ist. Da $\mathfrak{m}$ Ideal in $\mathfrak{n}$ ist, so ist die Modulbasis $[a, a\omega]$ zugleich eine Idealbasis in $\mathfrak{n}$; wegen (4) gilt folglich in $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{M} = (a, a\omega) = \left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right).$$

$\mathfrak{M}$ ist also der quadratischen Form mit den Koeffizienten a, b, c zugeordnet. Hierbei ist a als Norm von $\mathfrak{M}$ positiv und zu k teilerfremd.

§ 4.

Die Gausssche Komposition der Formenklassen von derselben Diskriminante $D = k^2\Delta$ geht bekanntlich so vor sich, daß zunächst aus zwei Vertretern F_1 und F_2 zweier Klassen K_1 und K_2 durch Lösung einiger Kongruenzen eine Form F konstruiert wird, deren Klasse das Kompositionsprodukt von K_1 und K_2 darstellt. Die Form F heiße eine aus F_1 und F_2 komponierte Form[1]).

Die Vertreter F_1 und F_2 dürfen dabei aber nicht ganz willkürlich innerhalb ihrer Klassen gewählt werden, sondern müssen „einhellig“ oder „einig“ sein. D. h.: Sind

$$(9) \qquad \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2, \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \end{cases}$$

die beiden Formen, so sollen die Zahlen

$$a_1, a_2, \frac{b_1+b_2}{2}$$

(wegen der Gleichheit der Diskriminanten ist $\frac{b_1+b_2}{2}$ eine ganze Zahl) ohne gemeinsamen Teiler sein. Diese wenig durchsichtige Bedingung läßt sich nun in der folgenden Weise auf dem Weg über die Idealtheorie anschaulich machen.

Die Koeffizienten einer jeden durch die Komposition entste-

---

1) Sie hängt von der speziellen Wahl von F_1 und F_2 ab, ist aber auch bei festen F_1 und F_2 nicht eindeutig, sondern nur bis auf Parallelität bestimmt. Dabei heißen, wie üblich, zwei Formen $A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2$ und $A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2$ von derselben Diskriminante parallel, wenn $A_1 = A_2$, $B_1 \equiv B_2 \pmod{2\,|A_1|}$ ist. Die Schar der aus F_1 und F_2 komponierten Formen ändert sich nicht, wenn F_1 und F_2 durch parallele Formen ersetzt werden.

henden Form

(2) $$ax^2 + bxy + cy^2$$

genügen bekanntlich den Bedingungen

(10) $$a = a_1 a_2,$$

(11) $$b \equiv b_1 \pmod{2a_1},$$

(12) $$b \equiv b_2 \pmod{2a_2}.$$

Die idealtheoretische Klärung der Einhelligkeitsbedingung geschieht nun zweckmäßig auf dem Umweg über zwei Hilfssätze (Satz 2 und 3), die auch an sich von Interesse sind und im wesentlichen schon in den Entwicklungen von H. Weber[1]) stecken. Der Schwerpunkt liegt in den Sätzen 4 und 5.

Satz 2: *Sind die Formen* (9) *einhellig, ist* (2) *eine aus ihnen komponierte Form und sind* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}$ *die zugeordneten Ideale in* $\mathfrak{n}$, *so ist*

(13) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2.$$

Beweis[2]): In Unbestimmten x_1, y_1, x_2, y_2 gilt, wenn N immer die formal gebildete Norm im quadratischen Körper bezeichnet:

$$N\left(a_1 x_1 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_1\right) = a_1^2 x_1^2 + a_1 b x_1 y_1 + a_1 a_2 c y_1^2,$$

$$N\left(a_2 x_2 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_2\right) = a_2^2 x_2^2 + a_2 b x_2 y_2 + a_1 a_2 c y_2^2,$$

also (unter Beachtung von (10))

$$N\left(\left(a_1 x_1 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_1\right)\left(a_2 x_2 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_2\right)\right)$$
$$= (a_1^2 x_1^2 + a_1 b x_1 y_1 + a_1 a_2 c y_1^2)(a_2^2 x_2^2 + a_2 b x_2 y_2 + a_1 a_2 c y_2^2)$$
$$= a_1 a_2 (a_1 a_2 x^2 + bxy + cy^2)$$
$$= N\left(ax + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y\right),$$

1) A. a. O., § 101. H. Weber beschränkt sich allerdings auf den Fall positiver und zu k teilerfremder Anfangskoeffizienten.

2) Der Hauptteil des Beweises verläuft analog zu einem Schlußverfahren aus § 146 von Dirichlet-Dedekind, wo indessen die Sprache der Idealtheorie nicht eingeführt ist. Ausrechnung einer Basis von $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ (genau so wie hernach bei Satz 4 für $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$) würde den Beweis etwas kürzer, aber undurchsichtiger machen.

wenn

$$(14)\qquad \begin{cases} x = x_1 x_2 - c y_1 y_2, \\ y = a_1 x_1 y_2 + a_2 x_2 y_1 + b y_1 y_2 \end{cases}$$

gesetzt wird. Daraus folgt:

$$(15)\qquad \left(a_1 x_1 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_1\right)\left(a_2 x_2 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_2\right) = a x + \frac{b \pm \sqrt{D}}{2} y.$$

Einsetzen der speziellen Werte $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 1$ ergibt $x = 0$, $y = a_1$, woraus man ersieht, daß im Zähler des auf der rechten Seite von (15) auftretenden Bruches das Pluszeichen gilt. Spezialisiert man nun x_1, y_1 und ebenso x_2, y_2 auf alle möglichen Paare ganzer rationaler Zahlen, so durchläuft der Ausdruck

$$a_1 x_1 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_1$$

wegen (11) gerade das Ideal $\mathfrak{m}_1$, der Ausdruck

$$a_2 x_2 + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y_2$$

wegen (12) das Ideal $\mathfrak{m}_2$. Da endlich

$$a x + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y,$$

wenn x und y durch alle ganzen rationalen Werte (nicht nur durch die von der Gestalt (14)) laufen, das Ideal $\mathfrak{m}$ ergibt, so folgt aus (15) (mit dem oberen Vorzeichen)

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \subseteq \mathfrak{m}.$$

Da $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}$ überdies dieselbe Norm $a_1 a_2 = a$ haben, so folgt (13).

Satz 3: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2 seien $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}$ die den drei Formen* (9) *und* (2) *zugeordneten Ideale in $\mathfrak{o}$. Dann ist*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2.$$

Beweis: Multiplikation von (13) mit $\mathfrak{o}$.

Satz 4: *Sind die Anfangskoeffizienten der Formen* (9) *positiv und zu k teilerfremd, so sind die Formen dann und nur dann einhellig, wenn das Produkt der zugeordneten Primitivideale $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ in $\mathfrak{o}$ wieder primitiv ist (d. h. wenn kein in $\mathfrak{M}_1$ aufgehendes Primideal zu einem in $\mathfrak{M}_2$ aufgehenden konjugiert ist).*

Beweis: Sind die Formen als einhellig vorausgesetzt, so folgt die Primitivität von $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ aus Satz 3. Umgekehrt sei nun $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ ein Primitivideal $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ zu k teilerfremd ist, so ist $\mathfrak{M}$ einer primitiven quadratischen Form zugeordnet:

$$\mathfrak{M} = \left(a, \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right).$$

Die Zahl $\frac{b+\sqrt{D}}{2}$ liegt in $\mathfrak{M}$, also um so mehr in seinem Teiler $\mathfrak{M}_1$. Daher liegt in $\mathfrak{M}_1$ auch die rationale Zahl

$$\frac{b+\sqrt{D}}{2} - \frac{b_1+\sqrt{D}}{2} = \frac{b-b_1}{2},$$

die also ganz-rational sein muß. Zufolge einer fundamentalen Eigenschaft der Primitivideale in der Hauptordnung[1]) ist sie also durch die Norm a_1 von $\mathfrak{M}_1$ teilbar; somit wird

(11) $$b \equiv b_1 \pmod{2a_1}.$$

Ebenso findet man:

(12) $$b \equiv b_2 \pmod{2a_2}.$$

Wegen $a_1 a_2 = N(\mathfrak{M}_1) N(\mathfrak{M}_2) = N(\mathfrak{M}) = a$ folgt hieraus

$$a_2 b_1 \equiv a_2 b \pmod{2a},$$
$$a_1 b_2 \equiv a_1 b \pmod{2a},$$
$$0 \equiv (b_1 - b)(b_2 - b) \equiv b_1 b_2 + b^2 - (b_1 + b_2) b$$
$$\equiv b_1 b_2 + D - (b_1 + b_2) b \pmod{4a},$$

(16) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 = \left(a,\ a_1 \frac{b+\sqrt{D}}{2},\ a_2 \frac{b+\sqrt{D}}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2} \frac{b+\sqrt{D}}{2}\right).$$

Jeder etwaige gemeinsame Primteiler von a_1, a_2 und $\frac{b_1+b_2}{2}$ müßte auf der rechten Seite von (16) in allen vier Basisbestandteilen aufgehen, also auch in $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ primitiv ist, so ist die Einhelligkeit der Formen (9) gezeigt[2]).

Satz 5: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4 sind die Formen* (9) *dann und nur dann einhellig, wenn das Produkt der zugeordneten Primitivideale* $\mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{m}_2$ *in* $\mathfrak{n}$ *wieder primitiv ist.*

1) Vgl. H. Weber, a. a. O., § 97, Satz 3. — Es handelt sich hier um eine spezifische Eigentümlichkeit des quadratischen Zahlkörpers.

2) Wegen $a = a_1 a_2$, (11) und (12) ist eine aus den Formen (9) komponierte Form durch $ax^2 + bxy + \frac{b^2 - D}{4a} y^2$ gegeben.

Beweis: Sind die Formen (9) einhellig, so lehrt Satz 2, daß $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ Primitivideal ist. Wird umgekehrt dieses Ideal primitiv vorausgesetzt und bedeuten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ die den Formen (9) zugeordneten Primitivideale in $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ ebenfalls primitiv; denn eine in allen Zahlen aus $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ enthaltene rationale Primzahl würde erst recht in allen Zahlen aus der Untermenge $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ aufgehen. Nach Satz 4 sind also die Formen (9) einhellig.

Beitrag zur Kenntnis der Psychologie der Hauskatze.

Von

J. Reinke in Preetz.

Vorgelegt in der Sitzung am 22. November 1929.

Teil I. Beobachtungen und Experimente.

Natur, materialiter betrachtet, ist der Inbegriff aller Gegenstände der Erfahrung.
KANT.

1. Zur vorläufigen Verständigung.

Frühzeitig las ich Fechners Nanna über das Seelenleben der Pflanzen und fühlte mich dadurch angeregt, Vorgänge der Reizbarkeit in Pflanzen psychisch zu deuten. Weil es mir aber nicht gelang, in den Tropismen, den Reflexen oder gar in der Morphogenese der Pflanzen einleuchtende Hinweise auf Bewußtseinsvorgänge zu finden, gab ich dies auf. Denn wenn man den Pflanzen ein unbewußtes Seelenleben zuerkennen wollte, müßte dies doch an irgend einer Stelle einmal in die Manifestation eines wenn auch noch so unvollkommenen Bewußtseins übergehen; sonst war es in meinen Augen kein Seelenleben [1]).

Meinem Denken als Naturforscher lag im wesentlichen jener erkenntnistheoretische Standpunkt zugrunde, den EDUARD v. HARTMANN unter der Bezeichnung „transcendentaler Realismus" entwickelt hat (vgl. dessen Schrift: Das Grundproblem der Erkenntnistheorie,

1) Es wird den Lesern dieser Zeilen bekannt sein, daß ich 35 Jahre lang den Lehrstuhl für Botanik an der Universität Kiel bekleidete. Unbekannt ist ihnen aber vielleicht, daß ich daneben auch einen Lehrauftrag für Allgemeine Biologie erhalten hatte, worunter die Tierpsychologie natürlich einbegriffen war, die mich stets besonders interessiert hat, weil in ihr ein Gegensatz von Tierleben und Pflanzenleben zum Ausdruck gelangt. Auch war ich von früher Kindheit an mit Ausnahme weniger Jahre Hundebesitzer. Die Psychologie der Tiere gewährte mir auch die unerläßliche Vergleichsbasis für eine etwaige „Psychobiologie" der Pflanzen. — Von meinen tierpsychologischen Studien veröffentlichte ich zunächst eine solche über dreijährige Beobachtungen an einer Zwergmaus unter dem Titel: Minutus (im Jahrbuche „Am Webstuhl der Zeit", Stuttgart 1908, Greiner u. Pfeiffer);

Leipzig, Haacke, 1890). Meine äußere Erscheinungswelt besteht danach in einer Schar von Zeichen, welche „die Dinge an sich selbst“ vermittelst meiner Sinnesorgane in mir zur Wahrnehmung gelangen lassen. Wieweit die Ähnlichkeit zwischen Zeichen und Dingen geht, ob sie z. B. dem Bilde, das mir ein vorgehaltener Spiegel von meinem Kopfe zeigt, entspricht, oder ob sie völlig anders ist, läßt sich nicht feststellen und bleibt darum für den Naturforscher gleichgültig. Meine innere Erscheinungswelt bilden die Gegenstände meines „inneren Sinnes“ (Kant), also die von mir ohne Zutun der Umwelt wahrgenommenen psychischen Vorgänge. Ich bin ferner überzeugt, daß meine Mitmenschen annähernd die gleichen Vorstellungen von den Gegenständen der Umwelt haben, wie ich selbst. Ich glaube auch, daß die „Dinge an sich selbst“ in Vielzahl in Raum und Zeit existieren und daß sie durch „rapporti funzionali“, wie Galilei sagt, d. h. durch Kausalnexus miteinander in Verbindung stehen. Endlich glaube ich, daß die „Kategorien“ des menschlichen Verstandes Anpassungen der menschlichen Psyche sind, die es uns ermöglichen, uns in der Mannigfaltigkeit der räumlichen, zeitlichen und kausalen Beziehungen der Umwelt zurechtzufinden. Diese psychischen Anpassungen bilden eine Parallelreihe zu den leiblichen Anpassungen des Organismus. Während die Erkenntnistheorien der Philosophen die hier angedeuteten Fragen unter logischen Gesichtspunkten bearbeiten, stellte ich als Naturforscher sie unter biologische Gesichtspunkte. Von letzteren werden die logischen Gesetze nicht ausgeschlossen, indem sie nach meiner Auffassung wegen ihrer erblichen Übertragung als Naturgesetze zu gelten haben.

Diesen von mir den psychischen Erscheinungen gegenüber eingenommenen Standpunkt vertrat ich vor der Öffentlichkeit zum ersten Mal auf dem im September 1904 in Genf abgehaltenen zweiten internationalen Kongreß für Philosophie. Ich war vom vorbereitenden

sodann über einen Papagei: Besitzt ein Vogel Einsicht in kausale Zusammenhänge? (Naturwissenschaftliche Wochenschrift, 1921, No. 52; Jena, Gustav Fischer). Endlich enthalten meine beiden folgenden Bücher eingehende Betrachtungen über Tierpsychologie:

J. Reinke, Das dynamische Weltbild; Physik und Biologie (Leipzig. J. A. Barth, 1926) und

J. Reinke, Wissen und Glauben in der Naturwissenschaft mit besonderer Berücksichtigung der Tierpsychologie (Leipzig, J. A. Barth, 1929). —

In dem Buche „Das dynamische Weltbild“, welches eine Synthese zwischen physikalischen und Lebenserscheinungen zu geben versucht, ist der sich von S. 65 auf S. 66 hinüberziehende Absatz zu streichen, weil er ein physikalisches Mißverständnis enthält.

Zentralkomité des Kongresses (Präsident Boutroux-Paris, Generalsekretär Claparède-Genf) eingeladen worden, als Naturforscher und Gast des Kongresses einen Vortrag zu halten über den Neovitalismus und die Finalität in der Biologie. Der Vortrag füllte die ganze letzte allgemeine Sitzung des Kongresses aus[1]). In demselben sagte ich u. a.: „Die Kategorien und das Denkvermögen sind die den menschlichen Bedürfnissen und der Außenwelt angepaßten Sinnesorgane des Geistes, oder, um ein gröberes Gleichnis zu gebrauchen, die von uns ererbten geistigen Flossen und Flügel. Wie jemand musikalisch sein muß, um Beethoven und nicht farbenblind sein darf, um Tizian und Böcklin zu genießen, so bedürfen wir der Kategorien unseres Verstandes, um uns in der Welt und im Leben zurechtfinden zu können“. ... „Die räumliche, zeitliche, kausale Vorstellungsweise ist ein Angepaßtsein unserer Seele an Raum, Zeit, kausale Verknüpfung“. ... „Wenn ich die a priori gegebenen Erkenntnisvermögen als Seeleninstinkte auffasse, glaube ich mich in Übereinstimmung mit Kant zu befinden, da dieser in § 30 der Prolegomena sagt: ‘Die Kategorien dienen gleichsam nur, Erscheinungen zu buchstabieren, um sie als Erfahrung lesen zu können’.“

In der an den Vortrag anschließenden langen Diskussion suchte Windelband die Kategorien für eine rein logische Betrachtung zu reservieren, während andere Philosophen mir beipflichteten und meine naturwissenschaftliche Deutung neben der philosophischen als berechtigt anerkannten.

So sehr die Naturwissenschaft, namentlich in ihren theoretischen Teilen, auf die Beachtung von Analogien angewiesen ist, bin ich mir doch wohl bewußt, daß Analogieschlüsse keine Erweiterung unseres Wissens herbeiführen, sondern nur Gebiete des Glaubens eröffnen, denen wir allerdings fruchtbare Arbeitshypothesen entnehmen können. Wie in jedem naturwissenschaftlichen Wissen der Gegenwart Irrtümer vorbehalten sind, so gilt ein gleiches in erhöhtem Maße vom naturwissenschaftlichen Glauben.

Wenn man mit dem Wort Seele die Summe von Empfindung, Wahrnehmung, Gefühl, Bewußtsein, Vorstellungsvermögen, Verstand und Wille bezeichnet, so ist die Seele ein unbezweifelbarer Bestandteil des Lebens der Großhirntiere und gehört schon darum zur Natur. Es ist mir das Dasein dieser Seele so gewiß, wie das ihres Leibes. Die Art und Weise der Bindung und Ab-

1) Der Vortrag erschien außer in den Akten des Kongresses im Biologischen Zentralblatt und wurde außerdem im Wortlaut abgedruckt in: J. Reinke, Naturwissenschaftliche Vorträge für die Gebildeten aller Stände (Heilbronn, Salzer, 1911).

hängigkeit zwischen Leib und Seele ist bei den Tieren allerdings so unbekannt, wie beim Menschen; darüber können auch die geistreichsten Hypothesen nicht hinwegtäuschen. Im Leben ist die Seele mit dem Leibe zu einer untrennbaren Einheit verbunden, sie geht durch Zeugung und Geburt in innigem Verein mit dem sich entwickelnden Leibe von Vorfahren auf Nachkommen über; nach dem Tode bemerkt man am Leibe des Tieres keine Spur mehr von der Seele. Substantiell braucht man die Seele nicht zu denken; vorstellbar ist sie überhaupt nicht, auch wenn man dafür „das Psychische“ sagt, wie es modern ist. Darum mißlingen alle Versuche von Definitionen der Seele. Daß die Seele an erster Stelle Gegenstand unserer Erfahrung sei, wird niemand in Abrede stellen. Wir sind überzeugt, daß die Seele in funktionaler Abhängigkeit vom Leibe besteht, daß sie mit dem Leibe in allen Phasen seiner Entwicklung durch funktionale Beziehungen (per rapporti funzionali) verbunden ist. Freilich können Wahrheiten von heute in der Zukunft als Irrtümer gelten. Weil alle unsere theoretischen Lehren nur provisorische Geltung haben, sollen wir uns in der Tierpsychologie möglichst auf Empirie stützen. Auch für die Analyse des psychischen Verhaltens der Tiere kommen die beiden allgemein in der Biologie geübten Methoden in Betracht: die vergleichende Beobachtung und das Experiment. Beobachtung und Experiment sind allerdings nicht soweit von einander verschieden, wie öfters gemeint wird. Abgesehen davon, daß jedes Experiment schärfste Beobachtung zur Voraussetzung hat, müssen wir bei Naturvorgängen, die sich einem von uns gewünschten experimentellen Eingriff entziehen, deren Bedingungen also gegeben sind, ohne daß wir sie zu setzen oder abzuändern vermöchten, jene gegebenen Bedingungen sorgfältig prüfen. Dann kann eine gegebene Bedingung einer willkürlich gesetzten gleichwertig werden, und eine Beobachtung wird damit zur Analyse eines Experiments der Natur.

In das Innere einer Tierseele vermag man so wenig zu blicken, wie in das Innere einer fremden Menschenseele. Es bleibt uns nur übrig, wahrgenommene Vorgänge zu deuten. Für solche Deutung bedürfen wir einer Vergleichsbasis. Daß die Maschine für diesen unsern Zweck einen untauglichen Maßstab abgäbe, dürfte allgemein eingeräumt werden; zumal hinter jeder Maschine ein menschlicher Geist steht. Bei allen Deutungen ist es das Richtige, von etwas Bekanntem auszugehen. Die Frage: Lassen sich die seelischen Eigenschaften des Tiers ableiten aus dem, was wir von dem materiellen (elektrischen) System wissen, aus dem der Leib mit Einschluß des Gehirns besteht? kann schwerlich bejaht werden. Von

etwas Psychischem in der Elektrizität wissen wir nichts. Das biologische System des Tiers ist etwas besonderes. Wollten wir zur Deutung des Seelenlebens eines Großhirntiers vom Seelenleben niederer Tiere, z. B. des Regenwurms, ausgehen, so würde sich auch dieser Weg als nicht gangbar erweisen, weil die psychischen Eigenschaften der niederen Tiere uns weniger bekannt und geläufig sind, als die der Großhirntiere. Man könnte an gewisse Arthropoden denken, wie Ameisen und Termiten, weil deren Seelenleben in tiefgründiger Weise studiert und bearbeitet worden ist; allein das Zentralnervensystem einer Ameise ist ganz verschieden von dem eines Großhirntiers. Um den Weg vom Bekannteren zum Unbekannteren zu beschreiten, bleibt daher als Ausgangspunkt nur unser eigenes Seelenleben übrig; dieser Weg erscheint mir wenigstens als der zweckmäßige. Man wird auf die Gefahr des Anthropomorphismus hinweisen, die solcher Vergleichung entspringt. Diesem Einwurfe begegne ich mit der Frage: Kann denn irgend ein Mensch anders als anthropomorph vorstellen und denken?

Zur weiteren vorläufigen Orientierung bemerke ich noch, daß folgende Hauptfragen in Betracht kommen: Hat die Katze Empfindungen? Wahrnehmungen? Vorstellungen? Gefühle? Gedächtnis? Bewußtsein? Beobachtungsgabe? Erfahrungen? Willen? Verstand? Diese und andere im Laufe der Untersuchung sich ergebende Fragen werde ich versuchen, auf Grund von Beobachtung und von Experiment zu beantworten. Seit etwa 8 Jahren habe ich der Psychologie der Katze, eines besonders interessanten Haustiers, ein eingehendes Studium gewidmet.

Es ist meine Meinung, daß die Tierpsychologie einen Teil der allgemeinen Biologie bildet. Diese Stellungnahme will natürlich der Philosophie das Recht nicht bestreiten, von ihren Gesichtspunkten aus sich mit Tierpsychologie zu beschäftigen, soviel ihr gut dünkt. Ich glaube, daß beide Gesichtspunkte ihre Berechtigung haben.

2. Anpassungen von allerlei Art.

Die leiblichen Anpassungen der Katze sind zunächst die allgemeinen der Raubtiere. Ihre Beine dienen nicht nur zum Laufen, sondern in vorzüglicher Weise zum Springen, wobei ich den Schweif nicht beteiligt finde. Eigenartig ist, daß die äußerst spitzen Krallen in einer Hornscheide stecken, wodurch sie beim Laufen geschont werden: nach Willkür werden sie als Waffe oder beim Klettern hervorgestreckt. — Der Sinneswerkzeuge sei kurz gedacht. Das Gehör ist scharf, die aufrechten Ohrmuscheln sind beweglich; für

gewöhnlich nach vorne geöffnet, können sie auf den Reiz eines Geräusches hin mit der Öffnung zur Seite oder fast nach hinten gestellt werden, mitunter ist eine Ohrmuschel nach vorne, die andre nach hinten gerichtet; bei Flucht werden die Ohren meist nach hinten auf die Schädelfläche herabgebogen. Der Geruch ist angeblich weniger scharf als der des Hundes; doch kommen Kater, wenn die Katze läufisch ist, aus weiter Entfernung herbei. Im Geschmack von Speisen ist die Katze wählerischer, als der Hund. Die Augen sind dem Sehen bei schwachem Licht vorzüglich angepaßt, funktionieren aber auch ausgezeichnet bei hellstem Tageslicht. Mich erkennt meine Katze, die ich der weißen Schnauze wegen „Dachs“ rufe, in jeder Kleidung von weitem, auch wenn der Wind konträr ist; in der Nähe ist es für sie gleich, ob sie mich nackt oder bekleidet sieht; weil sie den Blick auf meinen Kopf richtet, glaube ich, daß sie meine Gesichtszüge unterscheidet und sich eingeprägt hat. Zweifellos werden auf ihrer Netzhaut die gleichen Bilder fester Gegenstände: Stühle, Tische, Türen, Fenster, Baumstämme, Hohlräume usw. so entworfen, wie auf der Netzhaut des Menschen; denn die Katze verhält sich solchen Dingen gegenüber durchaus entsprechend dem Menschen. Daraus folgt, daß die Sinnesempfindungen der Katze Wahrnehmungen in ihrem Gehirn erregen, die den Sinnesempfindungen und den Wahrnehmungen im Gehirn des Menschen entsprechen. Wenn einige Tierpsychologen (aus erkenntnistheoretischem Anlaß) die Meinung geäußert haben, Katzendinge, Hundedinge, Sperlingsdinge usw. seien durchaus verschieden von Menschendingen, so halte ich das für überflüssige Spitzfindigkeit. Dann kann man auch Schulze-Dinge, Müller-Dinge, Lehmann-Dinge usw. unterscheiden.

Schon hier möchte ich bemerken, daß der logische Begriff des „a priori“ ins Biologische übertragen lautet: angeboren oder ererbt. Umgekehrt kann man die angeborenen bzw. ererbten leiblichen Anpassungen eines Tiers, die für seine Lebensfähigkeit erforderlich sind, und darum im Prinzip seinem Dasein vorausgehen müssen, unter logischem Gesichtspunkte als „a priori“ gegebene Eigenschaften bezeichnen. Der Unterschied zwischen „a priori“ und „angeboren“ wird damit zu einem nomenklatorischen.

Ich enthalte mich an dieser Stelle einer Erörterung darüber, ob die Instinkte leiblich oder seelisch zu deuten sind; vermutlich greifen bei ihnen leibliche und seelische Erregungen ineinander. Instinkte beruhen auf angeborener Reaktionsfähigkeit auf äußere oder innere Reize. Hervorgehoben sei die Erblichkeit der Instinkte, durch die auch sie den Tieren als biologisches Apriori gegeben

sind. Schwalbe und Fink sind erblich gezwungen, ganz verschiedenes Material für den Nestbau zu wählen; ebenso lernt und erwirbt eine junge Spinne nicht die Fähigkeit, ihr Netz zu weben, sondern sie kann dies a priori. Bei der Katze sei an die allgemeinen Instinkte, wie Hunger, Durst, Erotik, Brutpflege usw. nur erinnert; auf ein paar Sonderinstinkte möge hingewiesen sein. Um im Freien ihre flüssigen oder festen Exkremente abzuladen, scharrt die Katze eine Grube, eine Art Klosett, und setzt sich darüber. Nach Beendigung des Geschäfts wird die Grube wieder zugescharrt; durch den Geruch überzeugt sie sich, ob die Zuscharrung genügend war, sonst scharrt sie mehr Erde darüber. Der jungen Katze wird dies von der Mutter vorgemacht; trotzdem halte ich den Trieb für erblich, da er anderen Tieren nicht eigen ist. Die Katze hält ihren Körper sauber durch reichliches Belecken; um den Kopf und andere Teile zu waschen, die sie nicht mit der Zunge erreichen kann, bespeichelt sie die Pfote und wischt damit über jene Stellen. Der Lecktrieb wird nicht etwa durch einen Juckreiz des Körpers hervorgerufen; kommt meine Hand in ihre Nähe, so beleckt sie auch diese. Ebenso beleckt sie den Kopf und manchmal den ganzen Körper eines befreundeten Hundes. Hierbei schließt sie gern die Augen, was ein Lustgefühl andeutet. Wenn die Katze sich besonders wohl fühlt, schnurrt sie behaglich vor sich hin; will sie bei ihrem Herrn sich einschmeicheln oder ihm ihr Wohlwollen bezeigen, streicht sie mit dem Kopf oder mit dem ganzen Körper an seinen Beinkleidern entlang. Tritt der Katze etwas unliebsam entgegen (z. B. Berührung eines Hundes, mit dem sie nicht in Freundschaft lebt), so faucht sie. Tritt ein ganz fremder Hund in ihren Gesichtskreis, so brummt sie in Baßtönen, zugleich sträubt sich ihr Haar: Warnungs- oder Abschreckungs-Zeichen. Manchen Hund, der bereits mit Katzenkrallen Bekanntschaft gemacht hatte, sah ich auf solche Zeichen hin die Flucht ergreifen. Kommt es zum Kampfe mit einem fremden Hunde, so hört man wieder Fauchtöne.

Folgendes Experiment dürfte nicht ohne Interesse sein. Mein „Dachs“ hatte fünf Junge geworfen. Ein paar Stunden nachher nahm ich ihm die blinden Jungen, um sie in ein Körbchen zu tun. Jedes Tierchen, das ich berührte, fauchte; dies hatte es unmittelbar von der Mutter ererbt. Katzen sind wasserscheu; mein Dachs namentlich war nie ins Wasser gegangen. Um die Kätzchen zu töten, trug ich sie zu der am Garten hinfließenden Schwentine und warf sie möglichst weit hinein. Ich vermutete, daß sie alsbald untersinken würden. Doch alle fünf Kätzchen konnten schwimmen,

sie machten sofort die richtigen Bewegungen der Beine, wie ein Hund. Sie schwammen gar nicht alle sogleich mit der Strömung, sondern eins senkrecht dazu, eins sogar gegen den Strom; bald wurden aber auch diese von der Strömung fortgerissen, und nun schwammen sie einheitlich stromab, dem Untergange entgegen. (Bei späteren Würfen wurden die Jungen abgekürzt getötet.) Natürlich hatten sie diese instinktive Fähigkeit zum Schwimmen auch von der Mutter ererbt, doch ohne daß die Mutter — und vielleicht eine lange Reihe von Katzen-Generationen — jemals diese Befähigung ausgeübt hätte. Es handelt sich vermutlich um einen erblichen Instinkt des Raubtiertypus oder vielleicht des Säugetiertypus. Hierbei sei daran erinnert, daß ein menschlicher Säugling nicht schwimmen kann; schon ein größerer Mensch kann es nur, nachdem er es gelernt hat. Ob neugeborene Affen schwimmen, ist mir unbekannt. Wenn wir annehmen müssen, daß der Schwimminstinkt der Kätzchen schon in jeder alten Katze gegeben war, so zeigte er sich doch nicht, weil die als Reize gegebenen Bedingungen dazu im gewöhnlichen Katzenleben nicht eintraten.

Der Brutpflege-Instinkt ist, wie beim Nestbau der Vögel, auch bei der Katze antizipierend vorhanden, indem sie vor der Geburt nach einem passenden Platz für das Wochenbett sucht. Wie weit den Jungen gegenüber die Brutpflege geht, und welches Komödienspiel dabei einsetzen kann, habe ich an anderer Stelle beschrieben[1]).

3. Gefühle. Wille.

Hunger, Durst, Geschlechtstrieb, Brutpflege, Sauberhaltung des Fells durch Beleckung werden als Instinkte betrachtet; aus anderm Gesichtspunkt kann man sie den Gefühlen und den Gefühlshandlungen beizählen. Unlust- und Lustgefühle treten bei ihrer Erregung und bei ihrer Befriedigung hervor.

Aus der Zahl von Gefühlen, die bei der Katze wie bei andern Großhirntieren sich zeigen, und bei denen durchweg Reize die auslösenden Faktoren bilden, seien nur erwähnt: Schmerz, Freude, Schreck, Furcht, Mißtrauen, Wut, Gleichgültigkeit, Neugierde, Freundschaftsgefühle gegen andere Tiere und gegen den Menschen. Eine freudige Stimmung bekundet Dachs durch Schnurren, wenn ich sie an den Vorderbeinen fasse und auf den Hinterbeinen tanzen lasse; oder wenn sie behaglich auf ihrem Polsterstuhl ruht, ohne zu schlafen; sobald ihr ein Leckerbissen geboten wird. Furcht und Scheu sind bei Dachs leicht zu erregen, wenn man mit heftigen

---

1) J. Reinke, Wissen u. Glauben in der Naturwissenschaft (1924), S. 45.

Worten auf sie eindringt; sie läuft dann davon oder verkriecht sich. Die Worte versteht sie kaum, wohl aber fühlt sie den Klang der Stimme, je nachdem er hart oder freundlich ist. Allgemein und dauernd hat sie Angst vor Kindern, weil solche einst mit Steinen nach ihr warfen, während Erwachsene ihr gleichgültig sind. Mut zeigt sie gegenüber fremden, selbst großen Hunden, die in den Garten eindrangen; hiervon ein Beispiel. Ich beobachtete aus dem Fenster, daß Dachs auf dem Rasen lag und von einem fremden, in einer Entfernung von zwei Metern vor ihr stehenden Dobberman heftig angebellt wurde. Anfangs war Dachs ruhig und gelassen, schien nur ein wenig zu brummen; als ihm das Gekläff aber „zu dumm“ wurde, sträubten sich die Haare seines Rückens und Schweifs, so daß letzterer fast armdick aussah. Unmittelbar darauf fuhr Dachs blitzschnell dem Hunde an die Kehle und schlug die Krallen in seine Schnauze, so daß der Hund heulend davon lief. Dachs hinterher, der Hund war aber schneller; doch er mußte auf der Flucht aus unserm Garten ein dichtes Schneebeerengebüsch durchqueren, und hier holte Dachs ihn ein; aus dem Gebüsch ertönte erneutes Jammergeschrei des Hundes; man hörte ihn, nachdem Dachs kehrt gemacht hatte, noch eine ganze Strecke weit außerhalb unseres Gartens heulen. Neugierde zeigt Dachs z. B. darin, daß sie gern aus dem Fenster sieht, besonders an der dem Garten gegenüberliegenden Seite meiner Frdgeschoßwohnung, wo die Fenster auf einen weiten Rasenplatz gehen, auf dem häufig fremde Hunde spielen, und um den ein fahrbarer Weg vor die Haustür führt. Vor der Glastür, die aus meinem Arbeitszimmer in den Garten führt, sitzt Dachs öfters auf einer Steinplatte, den Rücken zur Tür gekehrt. Nähere ich mich geräuschlos der Tür und klopfe an die Glasscheibe, so fährt ihr Kopf blitzschnell für einen Augenblick herum, so daß sie mich sehen kann. Nunmehr ist ihre Neugierde befriedigt; denn wenn ich in Wiederholung klopfe, sooft ich will, rührt sie sich nicht mehr. Auch wenn ich sie zur Tür hinauslasse, nimmt sie meist die erwähnte Stellung ein; wenn ich dann klopfe, dreht sie sich nicht um, weil sie überzeugt ist, daß *ich* es tat. Sobald ich mit Dachs in den Garten gehe oder sie dort antreffe, folgt sie mir auf Schritt und Tritt und zeigt sich besonders interessiert, wenn ich mich mit einem Gegenstande im Garten beschäftige. Hier einen sich Neugierde und Anhänglichkeit. Als Dachs (vor 7 Jahren) noch ein junges Tier war, begleitete sie mich auf weiten Spaziergängen durch Feld und Wald wie ein Hund. Ging ich abends zu Bekannten, so folgte mir Dachs bis an deren Haus und wartete davor in einem Versteck

stundenlang, bis ich wieder herauskam, um mir dann durch Sprünge und ein vergnügtes „mäh mäh“ ihre Freude zu zeigen und mit mir heim zu kehren. Die gemeinsamen Spaziergänge außer dem eigenen Garten hörten bei Tage aber auf, nachdem bei der Rückkehr einst eine Schar Kinder Steine nach ihr geworfen hatte.

Ich muß noch etwas weiter ausholen, um Dachs freundschaftliche Gefühle gegen mich zu beschreiben. Als ich vor 7 Jahren meine Wohnung in Preetz bezog, besaß die Bewohnerin des oberen Stockwerks (sie sei O. genannt) eine graue Katze, die auf den Namen Mieze hörte. Diese hatte ein hübsches schwarz-weißes Kätzchen geworfen, das aber O. nicht in ihren Haushalt aufnehmen wollte. Das Tierchen trieb sich nach Aufhören des Säugens im Garten umher und wich jedermann aus; doch lockte ich sie eines Tages durch eine Schale mit Milch in mein Arbeitszimmer, und in der Folge wurden wir gute Freunde. Dies ging soweit, daß, als sie eines Morgens in unsre Wohnung kam, nachdem die Magd die Haustür geöffnet hatte, und unser Schlafzimmer offen fand, Dachs hier eindrang und auf das Fußende meines Bettes sprang. Dort machte sie es sich bequem, leckte sich und blieb liegen, solange ich Toilette machte; dann sprang sie herab und folgte mir ins Frühstückszimmer. Dies Verhalten hat Dachs 7 Jahre lang täglich fortgesetzt. Es steht die Tür des Schlafzimmers nachts zum Frühstückszimmer offen; das Mädchen öffnet zunächst die Haustür, um den Hund (Teckel) herauszulassen, und bei dieser Gelegenheit schlüpft die schon wartende Katze herein und sofort bis ins Schlafzimmer, bevor die Magd dessen Tür geschlossen hat. Das geschieht im Hellen des Sommers wie im Dunkel des Winters; hat Dachs einmal den Termin des Öffnens der Haustür verpaßt, so springt sie auf das Gesims eines Fensters und macht sich dem Mädchen von hier aus bemerklich, das sie dann hereinläßt. Während Dachs tagsüber, sofern sie sich nicht im Garten aufhält, in unserer Wohnung verweilt, hat sie nachts ihre Schlafstelle in dem vom Wohngebäude getrennten Waschhause.

Mit unserm Hunde „Molch“ steht Dachs auf dem Fuße gegenseitiger Duldung. Als sie noch jung war, spielten die beiden wohl miteinander auf dem Rasen, jagten sich, sprangen über einander hinweg usw. Später wies aber Dachs die Annäherung des Hundes kühl zurück[1]). Auf ein Verhältnis von Freundschaft zwischen Hund und Katze wird zurückzukommen sein.

---

1) Vgl. hierzu auch J. Reinke, Wissen und Glauben in der Naturwissenschaft (Leipzig 1929) S. 49.

Ein Ichgefühl ist bei Dachs vielleicht etwas weniger ausgeprägt, als bei anderen Tieren, wo es sich als Futterneid, in Verteidigung eines Besitzes (Knochen usw.) zeigt. Doch glaube ich, einige Andeutungen davon bei Dachs wahrgenommen zu haben, z. B. ein Besitzgefühl des Futternapfes, eines ihm zugewiesenen Liegeplatzes usw. Hat sie ein Stück Fleisch in den Klauen, brummt sie drohend, sobald der Hund sich ihr nähert. Auch hierauf wird zurückzukommen sein.

Allgemeine Lebenslust und Lebensfreude trägt namentlich die junge Katze deutlich zur Schau. Die zeigen sich schon, wenn das Tierchen durch die Wohnräume tobt, auf Stühle und Möbel aller Art springt und mit festen Gegenständen, einem Knäuel Wolle, einem Papierbausch, einem Ball usw. stundenlang in der drolligsten Weise zu spielen weiß; auf das Spielen mit der gefangenen Maus vor deren Tötung sei nur hingewiesen. Schließlich tritt Überdruß ein, die Lust weicht der Unlust, und neue Lust wird im Ausruhen gesucht, das die so lebhaften Bewegungen ablöst. Wichtige Bewegungen bestehen im schleichenden Gange, im Trab, im Galopp, im Sprung; darin, daß sie einen leichten Körper in die Luft wirft oder ihn vor sich her stößt, ihn im Maul davon trägt. Auch Langeweile ist der Katze nicht fremd; gefällt es ihr nicht mehr im Zimmer, geht sie an die Gartentür und wirft zunächst bittende Blicke nach ihrem Herrn; hat dieser es nicht bemerkt, so verstärkt sie ihre Bitte durch ein leises mäh mäh, bis sie hinausgelassen wird. In gleicher Weise handelt sie, wenn sie ein „Bedürfnis“ ankommt, da Dachs in kurzer Zeit „stubenrein“ geworden war. Lust fühlt die Katze nicht nur im Allgemeinen beim Stillen des Appetits, sondern in verschiedenem Grade, da sie sehr wohl zwischen alltäglicher Speise und Leckerbissen zu unterscheiden weiß. Beim Verspeisen der letzteren schließt sie gern die Augen, wie beim Lecken, oder wenn sie gestreichelt wird, was ein Zeichen von Lustgefühl ist. Sie unterscheidet zwischen dem, was ihr angenehm und was ihr unangenehm ist, und mit diesen Gefühlen hängen auch Freundschaft und Feindschaft gegen andere Tiere zusammen, worauf zurückzukommen sein wird. Befriedigung der Neugierde darf wohl zu den Lustgefühlen gerechnet werden, denn die Katze sieht gern aus dem Fenster und folgt meist dem Herrn, wenn dieser von einem Zimmer zum andern oder durch den Garten geht.

An die Gefühle der Katze reihen sich ihre Willensäußerungen. Man könnte die Katze geradezu als Willenstier bezeichnen. Wird Dachs, die ihren Rufnamen sehr bald kannte, gerufen, so bestimmt ihr Wille, ob sie kommt oder nicht. Bemerkt sie, daß mit dem

Ruf etwas verbunden ist, das sie interessiert, z. B. Bereithaltung eines Leckerbissens, eines Spielzeugs oder eine Zerstreuung (z. B. Ausgehen), so kommt sie in Sprüngen herbei. Weiß sie aber, daß ich nichts Eßbares zur Hand habe, oder glaubt sie, daß ich sie nur zu meinem Vergnügen rufe, so kann ich Dachs! rufen so laut und soviel ich will, sie rührt sich nicht vom Fleck; Eigensinn in voller Bedeutung des Wortes. Kurz, sie kommt oder sie kommt nicht, je nachdem sie will. Daß sie den Ruf vernommen, zeigt sie aber dadurch an, daß bei jedem Dachs!-Rufe ihre Schweifspitze einmal hinundher pendelt. Sonst ist die Katze mindestens so eigenwillig, wie ein Teckel.

4. Beobachten. Lernen. Gedächtnis.

Zu den vorzüglichsten psychischen Eigenschaften der Katze gehört ihr scharfes Beobachtungsvermögen. Nichts, was im Zimmer sich regt, entgeht ihr, nichts im Garten. Sie sieht jede Fliege an der Wand und springt nach ihr; auf das leiseste Geräusch hin bewegen sich ihre Ohrmuscheln. Bald weiß sie zwischen den für sie interessanten und uninteressanten Geräuschen zu unterscheiden; zu den ersteren gehört z. B. das Tellerklappern beim Tischdecken. Die uninteressanten Geräusche sind ihr teils gleichgültig, teils unangenehm. Merkwürdig ist, daß das Spiel auf dem Grammophon, auch im Fortissimo, Dachs ganz unberührt läßt, während ihr das Geräusch des Staubsaugers so widerwärtig ist, daß sie gleich ausreißt. Vor einem Mauseloch kann sie lange Zeit in großer Geduld, doch mit scharfer Spannung ihrer Aufmerksamkeit sitzen. Diese Aufmerksamkeit ist ein von der Katze ausgehender aktiver Vorgang. Um ihn näher zu prüfen, schritt ich zu einem Experiment mit der Angel.

Ich hatte das auseinander geschraubte Angelrohr mit der Schnur daran in einem Winkel meines Arbeitszimmers stehen, wo Dachs auf einem Polsterstuhl ein Ruheplatz angewiesen war, auf dem sie gern wie ein Hund zusammengerollt lag. Als ich das Rohr zum ersten Mal zusammenschraubte und damit durch die offene Gartentür in den Garten und bis zum Schwentinesteg ging, folgte mir Dachs in ihrer gewohnten Neugier. Sie sah dem Auswerfen der Angel zu. Sobald ich sie mit einem daran zappelnden Fischlein aufzog, sprang Dachs blitzschnell herzu, packte, ehe ich es hindern konnte, den Fisch, zerriß die dünne Angelschnur und war mit ihrer Beute im Gebüsch verschwunden. Kaum montierte ich am nächsten Tage wieder die Angel, so wußte Dachs schon Bescheid. Mit allen Zeichen gesteigerten Interesses sprang sie an

mir in die Höhe und lief dann vor mir zum Flußufer, auf dessen etwas erhöhtem Rande sie ihren Beobachtungsposten wählte, während ich den Steg betrat und die Angel auswarf. Deren Floß trieb mit der Strömung von rechts nach links soweit die Rohrlänge reichte; dann wurde sie hoch genommen. Beim ersten Aufziehen sprang Dachs auf den Steg, kehrte aber sofort enttäuscht zurück, weil der Haken leer war. Sie verfolgte fortan das treibende Floß mit großer Spannung, ohne sich indes zu rühren, wenn ich die leere Angel aufzog und wieder auswarf. Erst als von neuem ein Fisch daran hing, sprang sie herzu; doch diesmal hatte ich mich vorgesehen, löste selbst den Fisch vom Haken und warf ihn der Katze hin, die sogleich mit ihm davon lief, aber nach dem Verzehren zurückkehrte. Dies wiederholte sich eine Zeitlang täglich; meist stellte ich nach dem Fang eines Fisches das Angeln ein. Interessant war Folgendes. Dachs' Aufmerksamkeit war es nicht entgangen, daß eine Beziehung bestand zwischen einem Zucken und Verschwinden des Floßes unter dem Wasser und dem Heraufholen eines Fisches. Ihre Blicke waren darum scharf auf das Floß gerichtet, und ich bemerkte, daß, sobald das Floß zuckte, auch der Körper der Katze zusammenzuckte, als wolle sie sich sprungbereit machen. Sie lief aber nur herzu, wenn ein Fisch herausgezogen wurde. Ihre Aufmerksamkeit lenkte sie nach eigenem Willen und Interesse bald hierhin bald dorthin.

Beobachtung und Aufmerksamkeit hatten also die Katze schnell belehrt. Lernfähigkeit ist eine bemerkenswerte Erscheinung, die sich auf alle ihre Lebensgewohnheiten erstreckt. Wieweit sie in Manchem schon von der Mutter belehrt war, entzieht sich meiner Erfahrung; doch wird versichert, daß eine Mutterkatze den Jungen Unterricht gibt im Mäusefang. Bemerkenswert ist die bereits oben beschriebene Ablage der Exkremente. Wieweit dieses Verhalten auf individuellem Instinkt beruht, oder wieweit es von einer Belehrung durch die Mutter abhängt, vermag ich nicht zu sagen. Jedenfalls kann man eine junge Katze leicht stubenrein bekommen, wenn man an einer ihr zugänglichen Stelle im Hause einen Kasten mit Sand oder mit Torfmull aufstellt, in dem sie ihr Klosett bauen kann. Ist die Katze älter geworden, so sucht sie ins Freie zu kommen und hier ihre „Geschäfte" zu verrichten.

Das meiste Lernen der Katze beruht auf Selbstbelehrung, auf individueller Erfahrung. Die Erfahrungen sind meist schnell gesammelt. Bei guter Erziehung versucht sie nicht, auf einen mit Speisen bedeckten Tisch zu springen, solange der Herr zugegen ist; ist dies nicht der Fall, so stiehlt sie gern, soviel sie kann. In

Haus und Garten durchstreift und durchstöbert sie alle Orte und Winkel und weiß bald genau Bescheid. Namentlich kennt sie Türen und Fenster genau, letztere besonders zu den sie interessierenden Gemächern, um hineinspringen zu können oder um sich auf dem Gesims außen zu zeigen und um Einlaß zu bitten, sei es durch Klopfen, sei es durch ein mäh mäh. Wünscht sie aus einer geschlossenen Tür hinausgelassen zu werden, so stellt sie sich vor die Ritze. Komme ich hinzu, so blickt sie auf die Klinke, weil sie die Erfahrung gemacht hat, daß ich diese niederdrücken muß, damit die Tür sich öffnet. In dem Augenblick, wo meine Hand die Klinke berührt, senkt sie den Kopf und schlüpft durch die entstehende Spalte hinaus.

Mit solchen und ähnlichen Erfahrungen gehen körperliche Anpassungen Hand in Hand. Will sie auf das Fensterbrett springen, so schätzt sie die Entfernung und den erforderlichen Aufwand an körperlicher Anstrengung richtig ab; man sieht dies an ihrer Haltung vor dem Sprunge und dem damit verbundenen Grade von Muskelkontraktion. Steht ein Stuhl vor dem Fenster, so springt sie sicher erst auf diesen und von da auf das Fensterbrett, und beide Male ist die Muskelkontraktion vor dem Sprunge eine geringere. Das gilt auch von horizontalen Sprüngen. Dachs springt von einem Stuhl auf einen andren, der ein Meter davon entfernt ist; stelle ich aber von dem Stuhl, auf dem sie sitzt oder liegt, einen zweiten in zwei Meter Abstand auf und suche sie durch einen Leckerbissen zum Sprunge zu bewegen, so springt sie auf den Fußboden und von da auf den zweiten Stuhl. Aus einem Fenster des Erdgeschosses springt sie gern in den Garten; niemals aber aus einem Fenster des ersten Stocks. Raumschätzung!

Wie schon erwähnt, greift Dachs fremde, in den Garten eingedrungene Hunde an und verjagt sie. Es waren besonders ein Terrier und ein Teckel eines Nachbarhauses ihre Gegner, mit denen sie so verfuhr. Eines Tages sah ich, daß Teckel und Terrier in Gemeinschaft in unserem Garten über Dachs herfallen wollten; jetzt riß sie aus und war im Nu auf einen Baum geklettert; die Hunde standen unten und kläfften, bis ich sie verscheuchte. So einen sich Aufmerksamkeit und Schätzungsvermögen; die Katze schätzte, daß beide Hunde zusammen ihr verderblich sein würden.

Das Erkennen der Katze ist mit einem guten Unterscheidungsvermögen verbunden. Wenn Dachs sich an mir aufrichtet oder auf meinen Schoß springt, so berührt sie die Haut meiner Hände nur mit Sammetpfoten; während sie bei Berührung der Kleidung

Krallen ausstreckt, die sich durch das Beinkleid hindurch unangenehm fühlbar machen können, was der Katze einen Klaps auf den Kopf einträgt, doch ohne sie dauernd zu bessern. Diese Unterscheidung von Haut und Kleidung ist mir immer merkwürdig gewesen; die Katze hat das Gefühl, daß sie bei unmittelbarer Berührung des Körpers ihres Herrn sich angemessen benehmen müsse.

Die Lernfähigkeit der Katze beruht auf schneller Auffassung und auf einem vorzüglichen Gedächtnis. Letzteres erstreckt sich über längere Zeiträume. Ich erwähnte, daß Dachs sich daran gewöhnt hatte, jeden Morgen auf das Fußende meines Bettes zu springen. Hier verweilte sie auch, nachdem ich mich erhoben hatte, verfolgte dann mit wachsender Aufmerksamkeit das Fortschreiten meiner Toilette. Legte ich die Uhr an, so richtete sie sich schon auf, und sobald ich den Rock angezogen hatte, sprang sie vom Bette und stellte sich vor die Tür des Frühstückszimmers, wissend, daß diese nun gleich geöffnet würde. Ich hatte einen Winter in Südeuropa zugebracht, während Dachs in der Wohnung blieb und dort seine Verpflegung erhielt. Als ich nach sechs Monaten keimkehrte, sagte man mir, daß Dachs im Garten sei. Ich rief zur Gartentür hinaus: Dachs! Dachs! und sofort kam sie in Galoppsprüngen heran und rieb sich schnurrend an meinen Beinkleidern. Am nächsten Morgen erschien sie wieder zu gewohnter Stunde im Schlafzimmer, sprang auf mein Bett und verhielt sich, als wäre ich nicht fortgewesen. Den folgenden Winter brachte ich wieder auf Capri zu, und bei der Rückkehr verhielt sich Dachs genau wie nach der ersten Abwesenheit.

Über die Sprache des Tiers, die sowohl Gebärden- wie Lautsprache ist, vermag ich wenig zu sagen. Namentlich darüber nicht, wie sich Katzen untereinander verständigen, deren Unterhaltung in der Brunstzeit bekanntlich recht lebhaft ist. Doch es gibt auch eine Sprache zwischen Mensch uud Tier. Ich erwähnte schon, daß beim Sprechen des Menschen zum Tier es weniger auf den Wortlaut als auf Tonfall, Tonstärke und Klangfarbe des Worts ankommt; dennoch ist auch der Wortlaut, sofern er in Kommandoworten, die sich dem Gedächtnis der Katze einprägten, besteht, nicht ganz nebensächlich. Die eine Katze kennt ihren persönlichen Lockruf „Dachs“, die andere den „Peter“, die dritte den „Mieze“ usw. Wird Dachs, etwa durch Betteln bei Tisch, etwas zudringlich, so genügt das Kommando „ganz ruhig“, um sie zu bescheidener Haltung zu bewegen. Zeigt sie im Zimmer auffallende Bewegungen und ich frage: „Willst du raus?“, so läuft sie entweder an die Tür oder in einen Winkel, je nachdem sie auf die ihr wohl-

bekannte Frage antworten will. Auch das Wort „Komm“ ist ihr durchaus bekannt; doch folgt sie nur dann, wenn sie sich vom Ruf etwas verspricht. Auf das Wort „lauf lauf“ reagiert sie fast immer. Liegt sie auf einem Platz, der ihr untersagt ist, so genügt beim Hineintreten ins Zimmer ein lautes zorniges Dachs! um sie sofort aufzuscheuchen und in einem Winkel verschwinden zu lassen. Einst traf ich Dachs, der weiche Polsterung liebt, auf dem Sofa im Eßzimmer ruhend, wo sie durchaus nicht hingehörte; statt aller Worte nahm ich ein Lineal und verabreichte ihr einen derben Hieb, der sie schnell verschwinden machte. Ein paar Tage darauf traf ich Dachs wieder auf dem Sofa: kaum hatte sie mich erblickt. so sprang sie herunter; sie wurde jetzt nachträglich von mir nur tüchtig angedonnert. Seitdem habe ich Dachs nie wieder auf dem Sofa betroffen; sie gewöhnte sich, auf einen ihr zugewiesenen Liegeplatz, einen alten Polsterstuhl in einer Ecke meines Arbeitszimmers, zu springen und hier zu ruhen.

Die dem Menschen zugewandte Gebärdensprache der Katze ist zu mannigfaltig, als daß ich auf Einzelheiten eingehen möchte. Um so einfacher ist die Lautsprache, die Dachs an mich richtet. Sie besteht der Hauptsache nach nur aus vier Lauten. Aus dem Schnurren als Zeichen des Wohlbehagens oder der Bettelei. Aus dem Laute „Mäh“, womit sie bittet, durch eine Tür oder zum Fenster hinein oder hinausgelassen zu werden, oder wenn sie gespeist sein möchte. Aus dem Laute „Geck“, den sie ausstößt, wenn man ihren Schweif berührt, was sie nicht liebt; sie ruft aber auch „Geck“, wenn sie sehr hungrig ist und auf einen erhofften Bissen wartet. Dieser Laut scheint mir ein Zeichen der Ungeduld zu sein. Dann das „Miau“. Ich habe es von Dachs nur gehört, wenn sie sich in Not befand, dann wurde es aber anhaltend und in kläglichem Ton gerufen. Einmal rief sie es laut aus einem offenen Fenster des zweiten Stocks; sie war mit auf den Boden gelaufen und hier unbemerkt eingeschlossen worden.

Endlich kommen die bereits erwähnten Drohlaute gegen Feinde in Betracht. Schon neugeborene Katzen fauchen, wenn man sie berührt; die ältere Katze faucht, wenn ein fremder Hund in ihre Nähe kommt. Ist der Hund noch entfernter, so bedroht sie ihn durch tiefes Brummen. Dabei krümmt sie den Rücken, und ihre Haare, auch die des Schweifs, sträuben sich.

Im erotischen Verkehr zwischen Katze und Katern wird oft großer Lärm gemacht, doch konnte ich die Laute im einzelnen nicht feststellen.

5. Nachtrag.

Die Fortsetzung der Niederschrift dieser Abhandlung blieb längere Zeit liegen aus folgenden Gründen.

Eines Morgens meldete die Magd, daß Dachs tot in seinem der Nachtruhe dienenden Korbe liege. Er dürfte irgendwo vergiftete Speise genossen haben. Bald darauf reiste ich für einige Monate nach Südeuropa. Unterwegs traf die Nachricht ein, daß unsre kleine gelbe Dackelhündin von einer großen Hündin totgebissen sei. Nach der Heimkehr wurde zunächst wieder eine Dackelhündin erworben; diesmal war es ein etwas größerer dunkelfarbiger „stichelhaariger“ Teckel. Dieser war bald ein anhänglicher Hausfreund und wurde wiederum „Molch“ genannt. Molch II war den Katzen feindlich; kam eine fremde Katze in unsern Garten, verjagte er sie mit Gekläff. Ebenso mußte er auf Ausgängen zurückgehalten werden, um nicht jede, namentlich junge Katze zu jagen. Einmal verfolgte er eine Katze bis auf den Flur ihres Hauses; hier fühlte sie sich im Besitz ihres Heims und griff nun ihrerseits mit ihren Krallen den Hund an, der heulend davon lief. Bald darauf erhielt ich einen etwa zwei Monate alten Kater zum Geschenk, der an Farbe und Zeichnung des Fells dem Dachs I ähnelte; er wurde gleichfalls „Dachs“ gerufen. Ich war gespannt auf das Zusammentreffen von Molch II mit Dachs II in unserer Wohnung und gab dem Experiment die Gestalt, daß, als Molch II im Zimmer war, Dachs II hereingetragen und auf dem Schoße behalten, hier aber gestreichelt und mit freundlichen Worten geredet wurde. Der Hund blickte mit einem Ausdruck des Erstaunens herüber, doch ohne zu bellen; der Kater machte einen krummen Rücken, sein Haar sträubte sich, und er brummte in seinen tiefsten Tönen. Dann wurde er auf den Fußboden gesetzt. Molch II hatte schnell erfaßt, daß der Kater zu uns gehöre, unser Freund sei. Mit freundlichem Ausdruck und mit Wedeln des Schweifs näherte sich Molch dem Kater, doch dieser wies ihn mit Fauchen zurück. Das ging so einige Tage fort, doch Molch tat dem Kater nichts zuleide. Hierauf bemerkten wir eines Tages, daß Dachs II, der mit einer künstlichen an einem Bindfaden befestigten Maus gespielt hatte, auf den Schwanz des auf dem Fußboden liegenden Molch zusprang und auch mit diesem spielte, was der Hund sich ruhig gefallen ließ. Dann umarmte Dachs II plötzlich den Kopf von Molch und leckte ihn ab, was dieser unter freundlichem Schweifwedeln über sich ergehen ließ. Damit war das Eis gebrochen und Freundschaft zwischen beiden Tieren geschlossen. Fortan benutzte Dachs den Hund als Spielgefährten, sprang auf seinen Rücken.

balgte mit ihm herum, biß ihn (auf zärtliche Weise) in die Behänge, in die Schnauze usw. Molch öffnete gelegentlich gähnend seinen großen Rachen, in den der Kater mit der Pfote, einmal sogar mit dem Kopfe hineinfuhr, ohne daß die Tiere sich einander weh taten. Molch II wie Dachs II hatten jeder ein Körbchen zur Nachtruhe in der Küche erhalten. Doch bald benutzte Dachs das seinige nicht mehr, sondern legte sich zum Hunde in dessen Korb und schlief mit ihm zusammen. Dies Verhältnis ist so geblieben, und jetzt ist Dachs II sechs Monate alt. Sitzt Dachs im Zimmer und Molch kommt herein, so geht er auf Dachs zu und gibt ihm eine Art von Kuß: dann beginnen die beiden Tiere meist miteinander zu spielen. Ihr Verhältnis ist ein durchaus freundschaftliches; dabei hat Molch II seine Abneigung gegen jede fremde Katze behalten; er jagt sie aus dem Garten und sucht auch mit allen Katzen feindlich anzubinden, denen er beim Ausgehen begegnet, was oft recht unbequem wird. Entsprechend kann Dachs II fremde Hunde nicht leiden. Ist einer durch die offen stehende Pforte in den Garten gelangt, greift Dachs II ihn sofort an, was den großen Hunden des Jägers gegenüber uns schon mit einiger Sorge erfüllt hat. Die kleineren Hunde laufen davon.

Von den Eigentümlichkeiten des Dachs II seien nur folgende bemerkt. Einmal ist sein Schweif anscheinend unempfindlich: noch jetzt kann man ihn packen und den Kater daran hängend hinaustragen. Dann ruht er meist nicht eingerollt, sondern gerade ausgestreckt, bald auf der Seite, bald auf dem Bauch oder dem Rücken. Ferner macht er sich nichts aus Polsterung, sondern liegt ebenso gern auf harten Brettern. Dabei hat Dachs II sich schnellstens über alle Örtlichkeiten in Haus und Garten orientiert; er kennt die Bedeutung von Fenstern und Türen genau, stellt sich, wenn er hinaus will, an die Türritze und blickt gerade so auf die Türklinke, wie Dachs I, bis diese niedergedrückt ist, so daß er durch den Türspalt hinausschlüpfen kann. Dachs II war bereits stubenrein, als er zu uns kam. Er war gelehrt worden, vielleicht seitens seiner Mutter, auf einem mit Sand gefüllten Kasten sein Klosett zu bauen. Ihm wurde in einem Winkel des Flurs ein solcher Kasten hingestellt, den er stets benutzte. Kam ihn im Zimmer ein Bedürfnis an, so machte er an der Tür die gleichen Zeichen wie Dachs I, bis er hinausgelassen wurde. Nun sollte er angeleitet werden, sich im Garten sein Klosett zu bereiten. Auf die bezüglichen Anzeichen hin ward er in den Garten gesetzt, wo es an weicher Erde nicht fehlte. Was tat Dachs? Er sprang durch ein offen stehendes Fenster ins Haus und suchte dort seinen ge-

wohnten Kasten auf. Nach öfterer Wiederholung des Versuchs lernte er aber, auch das Gartenland zu seiner Ablage zu benutzen, und der Kasten kam fortan nur in zweiter Linie für ihn in Betracht.

Noch ein paar Eigentümlichkeiten von Dachs II seien erwähnt. Das Geräusch des Staubsaugers ist ihm so gleichgültig, wie das Grammophon. Er sieht ebenso neugierig aus dem Fenster, wie Dachs I. Nun befinden sich im Schlafzimmer, in das Dachs II morgens von der Magd hineingelassen wird, vor den Fenstern niedrige Tüllgardinen, die das Hinaussehen erschweren. Wenn Dachs I dort auf das Fensterbrett sprang, wandte sie einen flehenden Blick auf uns, damit wir ihr diese Gardine zurückschoben, doch hat sie nie gelernt, dies selbst zu tun. Dachs II dagegen erfaßte schnell nicht nur die hemmende Bedeutung der Gardine, sondern, nachdem sie ihm ein paarmal zurückgeschoben war, tat er dies selbst mit seiner Pfote oder kroch unter der Gardine durch, so daß er unmittelbar vor der Glasscheibe saß. Somit begriff und lernte Dachs II manches schneller als Dachs I; wie auch sein Temperament ein lebhafteres ist, als das der verstorbenen Dachs I.

Teil II. Deutungen.

> **Die fortwährende Erfahrung über die Bewegung unseres Leibes beweist uns zur Genüge, daß die Materie, dem Willen eines denkenden Prinzips unterworfen, in ihren Bewegungen von jenen abweichen kann, die sie hätte, wenn sie sich selbst überlassen wäre.**
>
> d'Alembert.

Im Vorstehenden wurde aus meinen Beobachtungen des Verhaltens der Katze eine Auswahl getroffen, die sich leicht vermehren ließe: doch scheint mir das Erzählte für eine zusammenfassende Beurteilung und Deutung ausreichend zu sein. Alle mitgeteilten Vorgänge sind nach meiner Meinung nicht nur leiblich-materiell, sondern auch psychisch bedingt. Schon dieser Umstand fordert neben der Analyse der Erscheinungen zu einer synthetischen Betrachtung heraus [1].

Mögen die mitgeteilten Beispiele dem Leser auch als Alltäglichkeiten, als etwas Bekanntes und Gewöhnliches erscheinen, so

1) Auf eine Erörterung der gesamten einschlägigen Literatur wurde verzichtet, weil sonst diese Abhandlung zu umfangreich würde. Nur sei noch einmal auf meine eigenen Schriften hingewiesen: „Das dynamische Weltbild“ S. 135 ff. und „Wissen und Glauben“ S. 36 ff.

bleibt doch zu beachten, daß gerade das Alltägliche, das Gemeine den Naturforscher mit besonderem Interesse erfüllt. Der Mann, der den Fall des Apfels vom Baume — gewiß das Allergewöhnlichste — mit wissenschaftlich eingestelltem Blick betrachtete, der die Fallbewegung als eine gesetzhafte einschätzte und ihre Gesetze ausrechnete, hat der Wissenschaft und damit der Menschheit einen großen Dienst geleistet. Da für eine Psychologie der Katze, wie sie mir vorschwebt, eine mathematische Behandlung ausscheidet, kommt es zunächst darauf an, die Beobachtungen unter einheitliche Gesichtspunkte zu bringen und sie ordnend zu klassifizieren.

Weil die erörterten psychischen Regungen, die Seelenvorgänge der Katze, in den Bereich unserer Erfahrung fallen, sollten sie schon darum zur Natur gerechnet werden. Ich erinnere an das Motto zu Teil I (Kant, Prolegomena § 16).

Oben stellte ich die Frage: Besitzt die Katze Empfindungen, Wahrnehmungen, Vorstellungen, Gefühle, Gedächtnis, Erfahrungen, Beobachtungsgabe, Bewußtsein, Willen, Verstand? Indem ich nebenbei darauf hinweise, daß das Großhirn der Katze kein Luxusorgan sein kann, wie etwa ihr Schweif, will ich jene Fragen gleich vorweg mit einem rückhaltlosen Ja! beantworten. Es ist bei dieser Antwort von vorne herein hervorzuheben, daß es sich im Seelenleben der Katze an erster Stelle um Bewußtseinsvorgänge handelt. Gewiß liegt ein Teil der Seelenvorgänge bei Mensch und Tier im Unterbewußtsein; auf das unterbewußte Seelenleben der Katze wurde indes nicht eingegangen.

Wir sehen uns vor die Aufgabe gestellt, das Seelenleben der Katze durch Vergleich zu erklären. Hierbei ergibt sich, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben wurde, die Alternative: das Höhere aus dem Niedrigeren oder das Niedrigere aus dem Höheren zu erklären. Der erstere Weg würde bedeuten, daß wir das Seelenleben eines Großhirntiers aus den psychischen Regungen niederer Tiere zu verstehen uns bemühen, oder gar, wenn man die weitestgehenden Hypothesen zulassen wollte, aus dem Leben der Pflanzen und dem Verhalten der Materie, den Eigenschaften der Elektrizität. Der zweite Weg ist, vom Menschen auszugehen und von seinem Seelenleben aus das Seelenleben der Katze zu begreifen. Wenn ich diesen zweiten Weg einschlage, so geschieht es, weil es mir das Richtige zu sein scheint, vom Bekannteren zum weniger Bekannten hin vorzudringen. Denn von einem bewußten Seelenleben der Pflanzen wissen wir nichts; ein Seelenleben auch da anzunehmen, wo Unbewußtes niemals zu Bewußtem wird — wenigstens soweit unsere derzeitige Erfahrung reicht — dazu kann

ich mich nicht entschließen. Wollten wir aber gar einen psychischen Paarling der Elektrizität hypostasieren, hieße das, eine willkürliche Hypothese der Naturphilosophie zur Grundlage unserer Betrachtungen zu machen. Auch die psychischen Regungen im Infusorium, in einer Schnecke usw.[1]) sind so wenig deutlich und sicher abgegrenzt, kurz so wenig bekannt, daß sie kaum Fingerzeige für die Untersuchung des Seelenlebens der Katze bieten können. Es ist mir darum nicht zweifelhaft, daß meine Erklärungsversuche sich vom Höheren zum Niedrigeren bewegen sollten, daß die Psychologie der Katze aus der Psychologie des Menschen verstanden werden muß. Meine präsumptiven Gegner werden daraufhin mir „Anthropomorphismus" vorzuwerfen geneigt sein. Ich fürchte diesen Vorwurf nicht, weil, wie bereits ausgesprochen wurde, wir Menschen gar nicht anders als anthropomorph vorstellen, denken, urteilen können. Ich berufe mich dabei auf zwei scharfe Denker als Gesinnungsgenossen. Zunächst auf den Satz des Protagoras, daß der Mensch das Maß aller Dinge sei. Sodann hat Goethe das harte Wort geprägt, der Mensch begreife niemals, wie anthropomorphisch er sei. Doch es kommt auf den Ausfall meines eigenen Gedanken-Experiments an.

Der Zusammenhang zwischen Leib (Gehirn) und Seele im Großhirntier ist bislang für den Menschen unerkannt geblieben. Nur Theorien darüber hat man ersonnen. Theorien sind die Poesie der Wissenschaft; sie sind wandelbar mit der Zeit. Für die von mir versuchten Deutungen kommen nur biologische Gesichtspunkte in Betracht. Dadurch wird allerdings die ganze Psychologie unter biologischen Gesichtswinkel gestellt, womit natürlich keinem anderen Gesichtswinkel die Gleichberechtigung abgesprochen werden soll.

Trotz aller Gebundenheit aneinander und trotz aller Abhängigkeit voneinander tritt in der Lebenstätigkeit der Katze die Verschiedenheit von Leib und Seele deutlich zutage.

Alles Psychische im Tier zeigt eine intensive Gegebenheit, ist ein Imponderabile: mit Maßstab und Wage ist ihm nicht beizukommen. Nichtsdestoweniger stehen die seelischen Vorgänge mit der extensiven Größe materieller Gehirnvorgänge in wechselweiser funktionaler Abhängigkeit. Diese Tatsache ist nicht zu bezweifeln. Nach meiner, an der Grundauffassung des Physikers Ernst Mach orientierten Deutung der Zusammenhänge (vgl. Dynam. Weltbild S. 19) ist aber funktionale Abhängigkeit gleichbedeutend mit kau-

1) Ameisen, Termiten usw. besitzen wohl ein ausgeprägtes Seelenleben; doch ist mir dies zu eng begrenzt, um eine Vergleichsbasis für das Verhalten der Großhirntiere abzugeben.

saler Abhängigkeit. Darum halte ich den Zusammenhang von Gehirn und Seele für ein wertvolles Beispiel wechselseitiger Abhängigkeit eines in der Natur gegebenen immateriellen Systems von einem materiellen System; eines Komplexes supermaterieller Kräfte (vgl. Wissen und Glauben S. 55) von einem Komplex materieller Kräfte: eines Unkörperlichen von einem Körperlichen; einer nicht in unser Erscheinungsfeld eingehenden Tatsachenfolge von einem Etwas, das uns als Vorstellung erfaßbar ist.

Unwiderleglich scheint mir die Auffassung zu sein, daß der Zusammenhang von Leib und Seele in der Katze biologisch begriffen werden muß. Denn die wahre Geburtsstunde des ganzen Tiers ist jene Minute der Zeugung, in der ein männlicher Zellkern mit einem weiblichen Zellkern sich vereinigt. Mit der dadurch gebildeten Anlage eines neuen Individuums sind Leib und Seele, sind die gesamten Lebensvorgänge des Tiers bereits gegeben. Das ist unabweisliche Tatsache, die unabhängig von jeder Theorie besteht.

Die Seele der Katze gelangt zum Ausdruck in ihren Handlungen, die wir aus den spontanen Bewegungen ihres Leibes erkennen. Diese Handlungen beruhen überwiegend in Spannung und Abspannung von Muskeln: nicht nur wenn sie läuft, springt oder leckt usw., sondern auch wenn sie blickt, horcht oder Laute von sich gibt. Die Motive des Handelns entnimmt sie großenteils ihrer Umwelt. Der Ursprung des Handelns aus solcher Motivation ist zweifellos psychisch bedingt. Meist vollzieht sich eine blitzschnelle Kombination von Vorstellungen im Bewußtsein des Tiers, die eine zielstrebige Richtung des Handelns und als Mittel dazu eine zweckhafte Einstellung der Muskulatur zur Folge hat. Im Prinzip wenigstens ist das Handeln der Katze ein zweckhaftes; dadurch findet sie sich in der Umwelt zurecht. Wird einmal unzweckhaft gehandelt, so kann dies auf einem Irrtum in Schätzung der Mittel, auf Ungeschicklichkeit oder sonstigen Fehlern beruhen. Doch die immer wieder wahrzunehmende Folgerichtigkeit im Handeln der Katze kann wohl nur psychologisch gedeutet werden, und diese Folgerichtigkeit hat nicht nur ein Einfühlen in die Umwelt, sondern auch ein Erkennen, ein Verstehen der Umwelt zur Voraussetzung. Nichtsdestoweniger ist alles psychische Geschehen in der Katze wiederum materiell bedingt, weil es im Gehirn verankert ist. Es trifft also der Eingriff eines zweckhaft wirkenden immateriellen Prinzips mit Bewegungen des Nervensystems und der

Muskulatur zusammen. Inwiefern dies immaterielle Prinzip in das Bewußtsein fällt, bleibt späterer Betrachtung vorbehalten.

Schopenhauers Welt war seine Vorstellung; sie schwand mit seinem Tode dahin. Entsprechend war die Welt von Dachs I. Vorstellung und hörte mit dem Erlöschen von Dachs' Leben auf. Selbstverständlich wurde der Bestand einer objektiven Welt durch beide Todesfälle nicht berührt. Daß aber das psychische Leben der Katze sich so gut in Vorstellungen bewegt, wie das des Menschen, ist mir unzweifelhaft. Indem ihr Besitz an Vorstellungen das Handeln der Katze beeinflußt, veranlaßt er sie zunächst zur Unterscheidung, zur Identifizierung, zur Bejahung und zur Verneinung von Dingen. Die Vorstellungen sind als Sinnbilder oder Abbilder von Dingen einerseits Wirkungen leiblicher Reize, andrerseits Vorgänge in einer vorstellenden Seele. Weil das Verhalten der Katze gegenüber einer Treppe, einem Graben, einem Gewässer usw. ein entsprechendes ist, wie das des Menschen, folgere ich daraus erstens eine wesentliche oder doch weitgehende Übereinstimmung der Vorstellungsbilder bei Katze und Mensch, zweitens eine Konstanz und eine Übereinstimmung der Umwelts-Gegenstände untereinander, mögen sie nun von der Katze oder vom Menschen wahrgenommen werden.

Die Vorstellungsbilder der Katze sind also Ergebnisse der Einwirkung von Dingen der Umwelt durch die uns bekannte Vermittlung der Sinnesorgane auf ihr Gehirn und durch die uns in den Einzelheiten unbekannte Einwirkung des Gehirns auf ihre Seele, auf ihr Bewußtsein. Alle Vorstellungen des Tiers sind bewußt; schon durch das Bewußtsein steht die Katze dem Menschen näher als der Pflanze. Dies Bewußtsein ist nicht nur ein allgemeines, sondern zeigt sich auch als Selbstbewußtsein, z. B. wenn sie ein Eigentum[1], etwa ein Stück Nahrung, gegen ein anderes Tier verteidigt[1], oder beim Angriff auf einen Feind, bei Verfolgung desselben, bei Flucht usw. Darin kommt das Prinzip von „Ich“ und „Du“ zur Geltung, und dies scheint mir als Zeichen von Selbstbewußtsein gedeutet werden zu können.

Im Bewußtsein der Katze entstehen die Vorstellungen durch Perzeption oder durch Apperzeption. Unter Perzeption verstehe ich ein passives Verhalten des Bewußtseins bei Wahrnehmungen. Wenn ich z. B. das schlafende Tier mit einer Nadel steche, so daß es den Schmerz empfindet, wenn es dann erwacht und mit einem

Aufschrei davonläuft, so ist das Perzeption eines Reizes. Unter Apperzeption verstehe ich ein aktives Verhalten des Tiers, nämlich die in aufmerksamer Beobachtung (oder Lauschen) gewollte und schließlich erzwungene Aufnahme von Reizwirkungen. Die apperzeptive Aufmerksamkeit ist auf einen Zweck eingestellt, z. B. auf den Fang einer Maus, eines Vogels, einer Libelle, einer Fliege usw. Scheinbar gleichgültig sitzt die Katze dem Mauseloch gegenüber; doch blitzschnell schießt sie auf ein sich hervorwagendes Mäuschen los. Diese Aufmerksamkeit ist ein wichtiges psychisches Merkmal in der Lebenstätigkeit der Katze. Ich konnte solche aktive Aufmerksamkeit besonders beim Angeln experimentell studieren; in ihr macht neben der Perzeption eine Absicht, ein zweckhaft eingestellter Wille sich geltend, der nicht durch die Hypothese eines automatisch wirkenden Reflexes erklärt werden kann. Bei der Katze ist die bewußte Absicht einer Beobachtung, z. B. wenn sie eine Beute beschleicht oder vom Menschen Speisung erwartet, ganz unverkennbar. Im Gegensatz dazu geschehen in ihr Perzeptionen und Wahrnehmungen auch bei ruhendem Willen.

Es besitzt die Katze also neben dem Vorstellungsvermögen einen auf zwecksetzende Tätigkeit, auf Handlungen aller Art bewußt gerichteten Willen[1]), der, wie beim Menschen, besonders beim

1) Den Wirrwarr in Schopenhauers Willenslehre (ebenso wie in Bergsons Elanlehre) glaube ich in meinem Büchlein „Die Schaffende Natur, mit Bezugnahme auf Schopenhauer und Bergson" (Leipzig, 1919) vom Standpunkte des Naturforschers aus genügend aufgedeckt zu haben. Richtig war es von Schopenhauer, seine Philosophie an der Naturwissenschaft zu orientieren. Er sollte dies aber korrekt und konsequent durchgeführt haben und nicht fortwährend Verkehrtheiten gröbster Art unterlaufen lassen. So wenn er behauptet, Schimmel am Brot und Läuse am Kopf entstünden durch Urzeugung. Das hätte Schopenhauer zu der Zeit, als er seine Bücher schrieb, schon besser wissen können und müssen.

Immerhin kann der Naturforscher eine Rücksichtnahme auf die philosophische Literatur nicht ganz vermeiden. Da wird es ihm am nächsten liegen, zu Kant zu greifen, obgleich diesem die in mehr als einem Jahrhundert gemachten Fortschritte der Naturwissenschaft nicht zu Gebote standen; aus diesem Grunde habe ich dem Rufe O. Liebmanns „zurück auf Kant" einst den andern hinzugefügt „vorwärts mit Kant und aufwärts von Kant". Aber Kant war bemüht, neben den naturwissenschaftlichen Spezialfächern eine allgemeine (synthetische) Naturwissenschaft zu begründen. Ich erinnere nur an sein 1786 erschienenes Buch: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft; vielleicht hätte im Titel das Wort „Metaphysische" fehlen können, weil man weder damals noch heute darüber einig geworden ist, was unter Metaphysik zu verstehen sei. Auch wird die Naturwissenschaft wie jede andere Wissenschaft an den Erkenntnistheorien der Philosophen nicht achtlos vorübergehen dürfen, und hier liegt das

Kinde in anscheinend zwecklosen Eigensinn übergehen kann. Man kann, falls die Katze kein eigenes Interesse am gehorsamen Kommen findet, sie rufen, soviel man mag; sie rührt sich dann nicht vom Fleck. Sie ist dann mindestens so eigenwillig, wie ein Teckel.

Ins Bewußtsein treten auch die Gefühle und Affekte der Katze, wobei sie deutliche Zeichen von Lust oder Unlust zu geben weiß. Ihre Lust wird erregt durch Genüsse aller Art. Sie zeigt auch allgemeines Lebensgefühl und Freude am Leben sowohl in ihrem Laufen und Springen durch Zimmer und Garten wie in ihrem Ruhen. Sie zeigt Zuneigung oder Abneigung gegen andere Tiere oder gegen Menschen, die sich zu Liebe und Zärtlichkeit, aber auch zu Furcht, Haß und Zorn steigern können. Unermüdlich ist der Spieltrieb junger Katzen, in dem eine anscheinend zwecklose Lebenslust zum Ausdruck gelangt. Das Wohlbehagen oder Mißbehagen der Katze kann nur auf seelische Vorgänge zurückgeführt werden. Eine Reflexmaschine vermöchte nicht zu genießen und sich zu freuen. Dabei nimmt Schreckhaftigkeit und Vorsicht der Katze mit ihrem Alter zu.

Dies hängt damit zusammen, daß die Katze Erfahrungen sammelt und in ihrem Gedächtnis speichert. Kant versteht unter Erfahrung eine „kontinuierliche Zusammenfügung der Wahrnehmungen“ (Prolegomena § 5); an anderer Stelle nennt Kant Er-

Gebiet, auf dem ich mir bei Kant Rat zu holen pflege, besonders wegen der Schlichtheit seiner Begriffsbestimmungen. Ich benutze dabei allerdings selten die so gepriesene Kritik der reinen Vernunft, sondern die zwei Jahre später (1783) erschienenen Prolegomena, welche die gleichen Fragen behandeln, wie die Kritik der reinen Vernunft, aber nicht nur in kürzerer, sondern nach meiner Meinung auch in klarerer Fassung: die Prolegomena sind nach meinem Empfinden das Ergebnis der Kritik der reinen Vernunft. Darum könnte man letzteres Buch eine kompliziert gebaute Blüte, die Prolegomena deren Frucht nennen; zutreffender ist es vielleicht noch, wenn ich früher einmal die Kritik d. r. V. dem Aktenbündel des Untersuchungsrichters, die Prolegomena dem Plaidoyer des Staatsanwalts verglich. — Wenn neuerdings Kants letztes Hauptwerk, die Kritik der Urteilskraft, als sein wertvollstes gefeiert wird, so kann ich dem wegen der überaus schroffen (und keineswegs nur scheinbaren) Widersprüche, die sich zwischen den einzelnen Paragraphen dieses Buches finden, nicht zustimmen. Eduard v. Hartmann äußerte zu mir im Gespräch nicht mit Unrecht: „In der Kritik der Urteilskraft nimmt Kant mit der linken Hand weg, was er mit der rechten Hand gegeben hat“. Ich finde es bedauerlich, daß Kant der Kritik der Urteilskraft nicht eine den Prolegomena entsprechende Zusammenfassung konnte folgen lassen. Dann würde es über Kants wahre Ansichten keine so weit gehende Meinungsverschiedenheit geben, man würde besser über sie ins Klare kommen. Wie sie einmal ist, macht die Kritik der Urteilskraft den Eindruck vielfach noch in Gärung begriffener Gedanken.

fahrung auch ein „Produkt der Sinne und des Verstandes“ (ebenda § 20). In dem Maße, wie eine Katze älter wird, richtet sich ihre Lebensführung nach ihren Erfahrungen.

Wie ich die Zehen der Katze für homolog halte den Fingern des Menschen, so halte ich auch das Gehirn und mit ihm das Gedächtnis und die darin gespeicherten Wahrnehungen der Katze für homolog dem Gehirn und dem Gedächtnis des Menschen. Homologie, nicht Analogie scheint mir die richtige Bezeichnung, der zutreffende Begriff für die hier in Betracht kommenden Beziehungen zu sein. Denn „Analogie ist nicht etwa eine unvollkommene Ähnlichkeit zweier Dinge, sondern eine vollkommene Ähnlichkeit zweier Verhältnisse zwischen ganz unähnlichen Dingen“ (Kant). Wenn ein Schauspieler den Prolog zum Faust deklamiert, so werden die betreffenden in seinem Gedächtnis ruhenden Gedanken mobilisiert und in die einst von Goethe niedergeschriebenen Worte gekleidet. Wenn die Worte des Schauspielers auf einer Grammophonplatte fixiert oder gespeichert und dann nach Jahren durch die Einwirkung einer Nadelspitze usw. wieder ausgelöst, mobilisiert werden, so daß sie genau in Pathos, Klangfarbe usw. der Stimme jenes Schauspielers mein Ohr treffen, dann besteht Analogie, nicht Homologie zwischen dem Gedächtnis des Schauspielers und dem Verhalten der Schallplatte. Ich kann darum dem Physiologen Hering nicht beistimmen, wenn er den Begriff des Gedächtnisses dahin zu erweitern suchte, daß er auch die Vererbung der Leibesgestalt umfassen und weiter sogar zu einer allgemeinen Eigenschaft der Materie werden sollte. Zweifellos ist das Gedächtnis abhängig von den materiellen Systembedingungen der Gehirnzellen, wie die im Grammophon ruhenden und potentiell vorhandenen Worte, Melodien usw. abhängig sind von den Rillen der Schallplatte. Von Gedächtnis kann bei der Schallplatte nicht die Rede sein; die Sprache müßte ein neues Wort erfinden, wollte man die hier erwähnte Analogie zu sprachlichem Ausdruck bringen.

Durch ihre Sinnesorgane gelingt der Katze eine unmittelbare, durch den Besitz ihres Gehirns eine mittelbare psychische Einfühlung in die Umwelt. Ihre Sinneswahrnehmungen sind, wie schon hervorgehoben wurde, teils passiv-ungewollt, teils aktiv-gewollt. Wie beim Menschen, prägen sich beiderlei Wahrnehmungen, meist in assoziativer Bindung, auch dem Gedächtnis der Katze ein. Wenn ich durch den Wald gehe und ein großes prächtiges Farnkraut erblicke, so deckt sich dessen Gestalt mit einem in meinem Gedächtnis haftenden typischen Bilde. Ich habe die Pflanze erkannt, d. h. ich habe ihr auf die Netzhaut meines

Auges projiziertes Bild richtig beurteilt. Etwas Erkennen ist nichts anderes, als es richtig beurteilen. Der richtig beurteilte Eindruck der Pflanze mobilisiert in meinem Gedächtnis zugleich assoziativ den Begriff und Namen Pteris aquilina. — Kommt die Katze vor irgend eine verschlossene Tür, so deckt sich deren Wahrnehmung mit dem in ihrem Gedächtnis aufbewahrten sensorischen Begriffe „Tür"; wünscht sie hindurchzugehen, so scharrt sie mit der Pfote an der Türritze, um zu prüfen, ob sie nur angelehnt sei und sich öffnen lasse. Ist die Tür fest verschlossen, so blickt sie zunächst zur Klinke auf, weil sie im Gedächtnis assoziativ die Erinnerung bewahrt, daß Senkung der Klinke (durch Menschenhand) ein Öffnen der Tür herbeiführt; kommt ihr dann kein Mensch zuhülfe, so macht sie kehrt. Das Gedächtnis von Mensch und Katze scheint mir danach übereinstimmend zu funktionieren. Im benutzten Beispiel war beim Menschen sogar nur von einem Artbegriff, beim Großhirntier von einem Gattungsbegriff die Rede. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit noch, daß die Bezeichnung „sensorischer Begriff" zuerst von Erich Wasmann angewendet wurde[1]).

— —

Die dem Gedächtnis sich mehr oder weniger fest einprägenden Erfahrungen werden von der Katze durch Erkennen gewonnen. Das Erkennen wurde soeben als ein richtiges Beurteilen bezeichnet; damit ist einseitig der psychische Teil des Erkenntnisprozesses betont, dem der sensorische Teil der Aufnahme von Sinnesempfindungen gegenübersteht. Jede eingehende Analyse des Erkenntnisprozesses ergibt einen schwer entwirrbaren Komplex ineinandergreifender seelischer und leiblicher Tätigkeit; hier können nur ein paar kurze Andeutungen Raum finden. Zunächst besteht das Erkennen bei der Katze in der Aufnahme, der Unterscheidung, der Identifizierung und der Klassifikation von Sinneseindrücken. Schon darin zeigt sich eine Lernfähigkeit der Katze. Dann kommt die Assoziation der Vorstellungsbilder in Betracht, zugleich eine zentrale psychische Reaktion des Tiers ihrer Mannigfaltigkeit gegenüber, eine Reaktion, wie auch der Mensch sie ausübt. Bei beiden Lebewesen kann in einer Assoziation die Kombination der Vorstellungen unwillkürlich oder willkürlich sein. Nach meiner Überzeugung stehen schon die primären Vorstellungsbilder der Katze keineswegs beziehungslos neben einander, sondern meist ist eine Vorstellung funktional abhängig von andern. Ich erinnere

---

1) Vgl. J. Reinke, Wissen und Glauben, S. 51; E. Wasmann im Bericht über den 9. Kongreß für experimentelle Psychologie 1925.

noch einmal an die verschlossene Tür. Nachdem die an die Tür gelaufene Katze mir einen bittenden Blick zuwarf, ich möge ihr öffnen, richtet sie die Augen solange auf die Klinke, bis meine Hand diese ergreift; augenblicklich senkt sie dann den Kopf, um durch die sich bildende Spalte hindurchzuschlüpfen. Die Katze kennt somit den ganzen in Betracht kommenden Kausalnexus; die funktionalen Beziehungen zwischen ihren Vorstellungsbildern sind nichts anderes als Kausalbeziehungen. (Vgl. Das dynamische Weltbild S. 19 ff.)

Im Zusammenhang hiermit möge kurz auf die Instinkte der Katze eingegangen sein. Wir verstehen unter Instinkt ein anscheinend unbewußt-zweckhaftes Handeln, das dem Tier wie seine leiblichen Eigenschaften angeboren ist, und wie die ganze Organisation der Erhaltung des Einzelwesens oder der Art dient. Wieweit Gefühlserregungen, die in das Bewußtsein fallen würden, mit dem instinktiven Handeln verbunden sind, ist in Einzelfällen meist nicht sicher zu entscheiden; der Trieb zur Nahrungsaufnahme, zur Fortpflanzung ist zweifellos mit Hunger- und Sättigungsgefühlen bzw. mit Wollustgefühlen verbunden. Die neugeborene, noch blinde Katze zeigt den Instinkt zum Saugen; sie faucht, wenn die Hand sie berührt, sie kann instinktiv schwimmen, wenn sie ins Wasser geworfen wird. Wächst sie heran, so tritt u. a. der Leckinstinkt hervor, der die Sauberhaltung des Felles zur Folge hat. Die Katze leckt aber auch die Hand, die sie streichelt, den ganzen Leib eines Hundes, mit dem sie in Freundschaft lebt, sogar die Decke, auf der sie liegt. Daß sie hierbei Einsicht in die Zweckhaftigkeit ihres Handelns habe, ist kaum wahrscheinlich; doch kneift sie beim Lecken die Augen zusammen, was ein Lustgefühl andeuten dürfte, weil sie es auch bei anderen lustbringenden Handlungen tut, z. B. beim Verschlingen eines Stückchens Fleisch. Der angeborene Instinkt der Tiere wirkt unbewußt und automatisch nach Außen, hierbei nicht selten gestaltend, wie im Netzweben der Spinne, im Wabenbau der Biene, im Nestbau der Vögel usw. Solche Gestaltung vollzieht sich im Rahmen biologischer Gesetze des betreffenden Biotypus. Daneben finden wir eine automatische Gesetzmäßigkeit in der Gestaltung des Tierleibes von der befruchteten Eizelle aufwärts, d. h. eine nach Innen gekehrte gestaltende Wirkung, die wie die Instinkthandlung unbewußt abläuft. Ich habe diese zweckhaft wirkenden Kräfte der Morphogenese provisorisch als diaphysische Kräfte[1]) unterschieden oder

1) Vgl. J. Reinke, Grundlagen einer Biodynamik (Berlin, Bornträger, 1922; S. 17; S. 146 ff.).

auch Dominanten genannt, und das Problem besteht, ob instinktive Handlungen und morphogenetische Prozesse einander homolog sind oder nicht, ob sie darum unter den gleichen Gesichtspunkt zu stellen sind, weil beide automatisch und unbewußt ablaufen. Wohl kann nicht bezweifelt werden, daß wenigstens ein Teil der Instinkthandlungen von Tieren z. B. durch Erregung von Lustgefühl in das Bewußtsein ausstrahlt, bezüglich der morphogenetischen Prozesse ist aber nichts dergleichen erkennbar; das würde schon die Trennungsspalte beider Geschehens-Reihen vertiefen. Ich selbst ging soweit, die Möglichkeit offen zu lassen, daß es einmal gelingen werde, alle diese zweckhaft-automatischen Wirksamkeiten dem Begriffe der Systembedingungen [1]) anzugliedern, eben weil sie automatisch ablaufen; immerhin scheint mir dies bei dem gegenwärtigen Standpunkte unseres Wissens noch recht unwahrscheinlich zu sein. Betrachtet man endlich nicht nur das unbewußt-zweckhafte, instinktive Handeln des Tiers sondern auch die unbewußt-zweckhafte Selbstgestaltung in der Ontogenese als Verrichtungen der Seele, so gelangt man zur „Psychobiologie“, einer biologischen Richtung, die in den Organismen, auch in den Pflanzen, nur materielle und psychische Kräfte unterscheidet, und die überzeugt ist, daß ihr die Zukunft gehöre. Die Zukunft mag denn auch entscheiden, ob diese Einteilung der in den Organismen wirksamen Kräfte in zwei Gruppen oder meine Einteilung, die ich stets nur eine vorläufige nannte, in drei Gruppen, die zweckmäßigere ist. Um mehr als um eine Zweckmäßigkeitsfrage dürfte es sich hierbei zur Zeit kaum handeln.

Die Erfahrungen der Katze werden also gewonnen durch Erkenntnis, in der Sinneseindrücke und Gehirnvorgänge sich mit Erinnerungen und sonstigen seelischen Vorgängen verbinden. Die psychische Seite der Erkenntnis des Tiers beruht meist auf einer Kombination von Instinkt und Verstand; solche Kombination tritt in den meisten Handlungen eines Großhirntiers mehr oder weniger deutlich in die Erscheinung. So ist z. B. die Brutpflege ein Instinkt. Das Aufsuchen eines geeigneten Platzes für das Wochenbett und alle zum Schutz der Jungen aufgewandten Listen sind dagegen dem Verstande der Katze zuzuschreiben; über ihr dabei bewiesenes, auf Täuschung eingestelltes Verhalten habe ich bereits (vgl. Wissen und Glauben S. 45 ff.) so eingehend berichtet, daß, um Wiederholungen zu vermeiden, hier nur darauf verwiesen sein mag.

1) Vgl. Das dynamische Weltbild S. 76 ff.

Wenn der ausgezeichnete Tierpsychologe Erich Wasmann den Ameisen ein Analogon zum menschlichen Verstande zubilligt (Vgl. Bericht über den 9. Kongreß für experimentelle Psychologie, 1925, S. 235 ff.), so möchte ich glauben, daß es sich bei einem Vergleich des Verstandes des Großhirntiers Katze mit dem Verstande des Menschen doch mehr um ein Verhältnis von Homologie handelt. Den menschlichen Geist nehme ich dabei ausdrücklich aus; er läßt sich schon dadurch unterscheiden, daß die Katze nicht über ihr eigenes Wesen nachdenkt, was der Menschengeist tut. — Die Unterscheidung von Seele und Geist im Menschen ist nur eine begriffliche, um die tiefe psychische Kluft zwischen Mensch und Tier scharf hervorzuheben. Für die Frage eines einheitlichen Wesens der Menschenseele kommt diese verbale Trennung kaum in Betracht. Man könnte ebensogut von einem Oberbau und einem Unterbau der menschlichen Seele sprechen, wobei der Unterbau als der Tierseele homolog oder wenigstens parallel anzusehen wäre.

Eine gemeinsame Grundlage der Erkenntnis bei Katze und Mensch ist dadurch gegeben, daß beide aus einem Erkenntnistriebe heraus handeln. Vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus können wir der Katze Erkenntnis sowenig absprechen, wie dem Menschen; beider Erkenntnis ist auf die Umwelt gerichtet. Die Erkenntnis der Katze baut sich auf aus Wechselbeziehungeu zwischen Subjekt und Objekt, die nicht als automatische, sondern nur als seelische gedeutet werden können. Auch bei der Katze hängt die Erkenntnis nicht weniger von der Beschaffenheit des erkennenden Subjekts als von der Qualität des erkannten Objekts ab.

Der Erkenntnistrieb der Katze hängt mit ihrem ererbten Selbsterhaltungstriebe zusammen; er funktioniert daher als Mittel zum Zweck. Die Erkenntnis kann von Außen an die Katze herangebracht werden: dafür noch ein experimentelles Beispiel. In meinem Arbeitszimmer stehen einige mit etwas rauhem Stoff überzogene Lehnsessel. Dachs II fing an, durch die Rauheit des Stoffs gereizt, daran zu kratzen. Ein einziger Hieb mit einem Lineal scheint ihn für immer von diesem Gelüst geheilt zu haben, denn er ist seit Monaten an jenen Stühlen eiligst vorübergelaufen, ohne sie anzurühren. In einer andern Ecke des großen Zimmers stehen ein paar mit glattem Leder bekleidete Sessel; auf einem derselben hatte der junge Kater es sich bequem gemacht. Das paßte mir nicht, und ich trug ihn auf den alten Polsterstuhl, auf dem Dachs I zu ruhen pflegte; auch Dachs II nahm den Platz an und schlief bald darauf ein. Am nächsten Tage fand ich ihn wieder auf dem

Ledersessel. Als ich ihm das Lineal zeigte, sprang er eilends herunter und hat auch diesen Sessel nicht wieder betreten.

Die Erkenntnis entspringt aus dem Innern der Katze. Das zeigt sich in ihrem vielfachen Probieren der verschiedensten Situationen. Über dies Probieren habe ich mich schon anderweitig (Wissen und Glauben S. 39) geäußert, und sei darauf verwiesen. Es entwickelt die Katze in solchem Probieren eine gewisse Methode, z. B. im Beschleichen einer Jagdbeute, im Widerstand und Kampf gegen Feinde usw. Früh lernte Dachs II die Abschätzung eines vertikalen oder horizontalen Springraums und richtete danach seine Muskelkontraktion ein: bald ist diese erkennbar gering, bald deutlich maximal. Im Probieren lernt das Tier.

Sowohl Erfahrungen sammeln wie autonomes zweckmäßiges Handeln bezeugen den Verstand der Katze. Ihr Verhalten gegen einen und zwei feindliche Hunde scheint mir hinreichend zu sein, um ihn zu erweisen (vgl. Dynamisches Weltbild S. 139). Vor einem von ihr als überlegen eingeschätzten Gegner flieht die Katze, während sie einen ihr minderwertig erscheinenden angreift. Hierbei wie in anderen Lebenslagen kann die Katze sich irren; schon die Möglichkeit des Irrtums deutet auf Verstand. Der Instinkt ist gewissermaßen unfehlbar, wobei er unabhängig von Verstandeseinflüssen sich geltend machen kann. Unfehlbar ist auch eine Maschine.

Wenn die Katze mit Bewußtsein richtig handelt, dürfte dies nur auf Grund von Urteilskraft möglich sein. Schon richtiges Erkennen setzt richtiges Urteilen voraus. Zunächst kommen Erfahrungsurteile in Betracht, die kombiniert werden aus den unmittelbar von außen her in ihrer Seele erregten Vorstellungsbildern und den bereits darin haftenden Gedächtniseindrücken. Natürlich kann man nicht daran zweifeln, daß Urteilen wie alles psychische Handeln in funktionaler Abhängigkeit steht vom Gehirn; Empfindungen und Anschauung bedingen solchen Zusammenhang. Daraus ergeben sich für die Katze Anschauungsbegriffe oder „sensorische Begriffsbildung“ (Wasmann). Von abstrahierenden Begriffen kann nicht wohl die Rede sein. Gattungsbegriffe wie Tür, Türritze, Türklinke, Fenster, Stuhl, Hohlraum, Hund, Kind usw. sind der Katze geläufig. Einem ihr begegnenden Einzeldinge gegenüber handelt sie aus solcher begrifflichen Kenntnis heraus. Sie weiß z. B. genau, welche Tür und welche Fenster des Hauses immer geschlossen sind; will sie aus dem Garten in das Haus, so stellt sie sich nur an solchen Fenstern oder Türen an, die sich erfahrungs-

gemäß dann und wann öffnen. Sie versteht zu unterscheiden und zu individualisieren.

Kant nennt Urteil „die Vereinigung der Vorstellungen in einem Bewußtsein“ (Proleg. § 22). Ich möchte nicht nur für den Menschen, sondern auch für die Katze ergänzend sagen: die zweckmäßige, in der Regel richtige Vereinigung, weil unzweckmäßige Vereinigung von Vorstellungen ein Fehlurteil, einen Irrtum ergeben würde, der der Katze sogut unterlaufen kann, wie dem Menschen. Auch sind Absicht und Wille von der Urteilsfindung der Katze wohl kaum, wenigstens nicht immer zu trennen. Denn die Katze vermag ihre Vorstellungen in vielen Fällen ohne Zweifel aktiv zu kombinieren; ein Schwanken und Abwägen vor einem Entschluß, z. B. eines Sprungs, ist deutlich zu erkennen. Damit ist nicht ausgeschlossen, daß ihr Handeln auch durch passive Vorstellungs-Vereinigungen beeinflußt werden kann. Auf diese letzteren möchte ich den Begriff der Assoziation beschränken. Wenn eine Schule unter den Psychologen im Seelenleben der Tiere nur „intelligenzähnliche Assoziationswirkungen“ vorkommen läßt, während allein der Mensch zu „eigentlichen Intelligenzhandlungen“ befähigt sei, so wünscht man damit eine absolute Scheidewand zwischen Menschen- und Tierseele aufzurichten. Obgleich auch ich den Unterschied zwischen Menschen- und Tierseele für einen fundamentalen halte, scheint mir das Bemühen, mit solchen Schlagworten die absolute Scheidewand zu kennzeichnen, doch ein vergebliches zu sein. Aktiv gewollte und passiv erlittene Assoziationen kommen bei beiden Biotypen vor. Es scheint mir damit zugleich, daß in beschränktem Umfange auch das Problem der Willensfreiheit für die Katze besteht. Denn vor eine Wahl gestellt, trifft sie ihre Entscheidung, die auch ein Fehlgriff sein kann.

Die Katze urteilt und schließt bei Jagd, Erotik, Kampf usw. aus dem Schatz ihrer Erfahrungen und aus ihren unmittelbaren Vorstellungs-Eindrücken heraus. Sie lernt z. B. aus Erfahrung bald erkennen, daß eine Fensterscheibe zwar durchsichtig ist, aber doch eine undurchdringliche Wand bildet. Jedem ihrer Urteile geht Unterscheidung und Klassifikation voraus, und damit bekundet sie ein primitives Denkvermögen. Die Frage, ob die Katze Phantasie besitzt, grenzt an die Frage, ob auch das primitivste Denken ohne Mitwirkung von Phantasie möglich ist. Dachs I hatte nicht die geringste Furcht vor fremden erwachsenen Menschen, wohl aber vor Kindern, weil eine Schar kleiner Kinder sie einst mit Steinen bewarf. Stets wiederholte es sich, daß, wenn ein Kind, etwa an der Hand der Mutter, einmal besuchsweise das Zimmer

betrat, in dem Dachs friedlich ruhte, sie sofort aufsprang und mit einem jämmerlichen Miau an die Tür eilte, um hinausgelassen zu werden. Jene alte Erfahrung erregte anscheinend in ihr das Phantasma, daß auch jedes ganz freundlich gesonnene Kind ihr Feind sei.

Wenn die Katze aus ihren Wahrnehmungen Folgerungen zieht und diesen entsprechend handelt, so kann man schwerlich die Annahme umgehen, daß diesem Handeln ein Denkprozeß vorausgehe. Seitens des Menschen würde es daher nach meiner Meinung eine Anmaßung sein, wollte er behaupten, daß die logischen Gesetze nur für ihn Geltung besäßen, nicht auch für die Großhirntiere.

Die Katze scheint mir in ihren Handlungen auf Grund logischer Gesetze die Mittel zu benutzen, welche zur Erreichung eines Zwecks erforderlich sind. Auch halte ich es für unwahrscheinlich, daß im Bereich unserer Erfahrungswelt irgendwo andere logische Gesetze bestehen, als sie aus der Menschenseele bekannt sind, in der sie mit einer Unfehlbarkeit wirken, die man eine instinktive nennen könnte. Unter biologischem Gesichtspunkte sind diese Gesetze dem Menschen sogut erblich angeboren, wie der Katze. Wenn sie letzterer auch nicht zu einem Werkzeuge wissenschaftlicher Arbeit werden können, dienen sie ihr doch als unentbehrliches psychisches Werkzeug für ein auf Grund von Überlegung erfolgendes praktisches Handeln. Es scheint mir, daß die Katze sowohl dem Satze der Identität wie dem des Widerspruchs und dem des ausgeschlossenen Dritten in ihrem Unterscheiden und Kombinieren wie in all' ihrem Handeln gehorcht. Auch der strenge Erkenntnistheoretiker wird die Befolgung der logischen Gesetze durch seinen Mitmenschen nur aus dessen Handlungen erschließen.

Neben den drei logischen Grundgesetzen haben nach meiner Meinung auch für die Katze die in der Verstandestätigkeit des Menschen maßgebenden Denk- und Anschauungsformen Geltung. Bei den Philosophen heißen sie Kategorien. Kant unterscheidet deren eine Zwölfzahl, E. v. Hartmann noch mehr, Schopenhauer reduziert die Zahl auf drei, auf Raum, Zeit und Kausalität. Kant, in dem wir nicht nur einen epochemachenden Philosophen, sondern auch einen weitblickenden Naturforscher verehren, gibt in seinem nach meiner Meinung reifsten erkenntnistheoretischen Werke (Prolegomena § 23) folgende Erklärung ab: Die Grundsätze, vermittelst deren die Erscheinungen unter die Kategorien subsumiert werden, machen „ein physiologisches d. i. ein Natursystem“ aus, das aller

empirischen Naturerkenntnis vorhergeht und diese erst möglich macht; darum könnten diese Grundsätze „die eigentliche allgemeine und reine Naturwissenschaft“ genannt werden. Und an anderer Stelle bemerkt Kant (Proleg. § 9): Anschauung könne „vor der Wirklichkeit des Gegenstandes“ nur vorhergehen und als Erkenntnis a priori stattfinden, „wenn sie nichts anderes enthält als die **Form** der Sinnlichkeit, die in meinem Subjekt vor allen wirklichen Eindrücken vorhergeht, dadurch ich von Gegenständen affiziert werde. Denn daß Gegenstände der Sinne dieser Form der Sinnlichkeit gemäß allein angeschaut werden können, kann ich a priori wissen“.

Wenn ich gleiche Beziehungen für den Verstand der Katze durch einen Analogieschluß glaube annehmen zu dürfen, halte ich die im Gehirn der Katze verankerten Kategorien von Raum, Zeit und Kausalität für formale Bedingungen ihrer Sinneswahrnehmungen. Weil man gegenüber den äußeren Sinnen die Kategorien als „innere Sinne“ auffassen und bezeichnen kann, sprach ich schon in früheren Arbeiten der größeren Einfachheit halber und der Verdeutschung wegen von Raumsinn, Zeitsinn und Kausalsinn, die nach meiner Überzeugung der Katze nicht abgesprochen werden können, und ohne die sie sich in der Umwelt sowenig zurechtfinden würde, wie ohne Augen, Ohren, Geruchsinn, Geschmacksinn, Tastsinn. Sogut wie die äußeren Sinne als Anpassungen des Tiers an seine Umwelt gelten, sogut sind auch jene inneren Sinne als Anpassungen zu deuten; man kann sie psychische Anpassungen nennen. Wie die äußeren Sinne des Tiers in der Zeugung vererbt werden, so geschieht ein gleiches mit den inneren Sinnen. Nicht sie allein sind dem Tier somit a priori gegeben, sondern von allen leiblichen (äußeren) Anpassungen gilt ein gleiches. Besäße die Katze ihre äußeren und ihre inneren Sinne nicht a priori, so wäre sie nicht lebensfähig. Weil bei gesunder Ausprägung die Tätigkeit der inneren wie der äußeren Sinne eine nahezu unfehlbare ist, vergleichbar der erlernten Fingerfertigkeit eines geübten Klavierspielers, weil aber ihre Anwendung nicht erlernt, sondern ererbt wurde, so kann man den Raumsinn, den Zeitsinn, den Kausalsinn des Tiers auch als psychische Instinkte deuten.

Im ersten Teile dieser Abhandlung sind Beispiele dafür gegeben, daß die Katze Raumsinn, Zeitsinn, Kausalsinn besitzt. Um erstere beide zu erweisen, genügt ihr Verhalten beim Gehen, Laufen, Springen; für letzteren die scharfe Beobachtung der Türklinke, wenn eine Menschenhand sich dieser nähert, um sie niederzudrücken. Ausführlich habe ich mich dazu im dynamischen Weltbild S. 144 ff. geäußert. Ich habe dort der logischen Kategorien-

lehre der Philosophen eine biologische Kategorienlehre des Naturforschers gegenübergestellt. Beide Betrachtungsweisen halte ich für gleichberechtigt. Daß auch die Katze ihre Umwelt in den Anschauungs- und Denkformen von Raum, Zeit und Kausalität beurteilt, ist mir so unzweifelhaft, wie es selbstverständlich ist, daß sie sich dabei sowenig des Kausalprinzips wie der allgemeinen Begriffe von Raum und Zeit bewußt ist, wenn sie dem Zwange der Kategorien gemäß handelt.

Das wichtigste Argument für meine Deutung bleibt, daß mit dem Großhirn und dem übrigen Leibe auch alle psychischen Eigenschaften der Katze sogut in der Zeugung vererbt werden, wie beim Menschen. Alles Vererbte ist einem Lebewesen a priori gegeben. Damit sind die hier ausgesprochenen Deutungen des Seelenlebens der Katze aus dem Gesichtsfelde des Naturforschers biologisch begründet.

Einen tiefen Gegensatz zum Seelenleben des Menschen zeigt die Katze in der Unvollkommenheit ihrer Ausdrucksmittel. Die Katze gibt ihre Gefühle, Wünsche, Absichten zu erkennen hauptsächlich durch Gebärdensprache, viel weniger durch Lautsprache. Insofern beide, Gebärdensprache und Lautsprache, auf einer durch den Willen vollzogenen Zusammenziehung und Ausdehnung von Muskeln beruhen, stehen sie einander nahe. Durch den Willen werden die psychischen Stimmungen der Katze anderen Tieren und dem Menschen kundgemacht. Auch der Mensch redet sowohl durch Gebärden wie durch Laute auf die Katze ein, die durch Auge und Ohr solche Sprache perzipiert und je nach ihrem Ermessen danach handelt oder nicht.

Eine allgemeine Theorie der Erkenntnis sollte darum nicht nur den Menschen, sondern auch die Großhirntiere, vielleicht alle Tiere, berücksichtigen. Man kann dem gar nicht ausweichen, sobald man die Erkenntnistheorie nicht wie ein Monopol der Philosophie überläßt, sondern wenn auch die Naturwissenschaft sie in ihre Kreise einbezieht; muß doch jeder Naturforscher sich mit der Frage auseinandersetzen: Was kann ich von der Natur durch Erfahrung erkennen und darum wissen? Wird die Erkenntnistheorie wissenschaftliches Gemeingut, so wird vielleicht auch das etwas seltsame Schauspiel verschwinden, daß fast jeder Philosoph eine besondere Erkenntnistheorie vertritt. Ich bin der Meinung, daß die Erkenntnistheorie sowohl in Problemstellung wie in Beantwortung wichtiger Fragen den Naturforschern viel verdankt; schon Galilei ist hier in bemerkenswerter Weise vorangegangen, wie sich u. a.

aus seinen Briefen ergibt. Nur ein Wort von Julius Robert Mayer, dem Entdecker des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, sei hier angeführt: „Der Nachweis einer zwischen den Denkgesetzen und der objektiven Welt bestehenden vollkommenen Harmonie ist die interessanteste, aber auch die umfassendste Aufgabe, die sich finden läßt“. Ich bin zwar Skeptiker genug, um die Aussicht für gering zu halten, den Beweis (in mathematischem Sinne) für solche prästabilierte Harmonie zu erbringen; doch genügen mir die unbezweifelbaren Tatsachen, um an jene Harmonie fest zu glauben. Alles Apriori in Tierseele und Menschenseele hätte in meinen Augen keinen Sinn, wenn es nicht, wie die Gestalt des Leibes und das Zusammenwirken seiner Teile als somatische Anpassung gilt, als psychische Anpassung des Lebewesens an die Wirklichkeit der Umwelt gedeutet werden könnte. Sollte nicht die Entwicklung der Leibesorgane aus der befruchteten Eizelle in gleicher Weise eine prästabilierte Harmonie zwischen der Eigenwelt eines Tiers und der umgebenden Wirklichkeit bezeugen, wie der Ursprung seines Raum-Zeitsinns und seines Kausalsinns aus der gleichen Keimzelle? Es scheint mir, daß im Grunde auch Kant keiner anderen Meinung war; dafür war er zu sehr Naturforscher. Allerdings interessierten ihn die rein logischen Beziehungen seines Apriori viel zu sehr, als daß er den doch auch berechtigten biologischen Gesichtspunkten anders als in Andeutungen Rechnung getragen hätte. Ich führe hier aus den Prolegomena neben den bereits zitierten Stellen (S. 163; 164) nur noch das eine Wort in § 13 Anm. II. an: „Es sind uns Dinge als außer uns befindliche Gegenstände unserer Sinne gegeben“. Damit ist erwiesen, daß man einseitig verfährt, wenn man Kant, wie er es allerdings selbst tat, nur für einen „transcendentalen Idealisten“ erklärt. Mit gleichem Recht könnte man ihn auch als „transcendentalen Realisten“ in Anspruch nehmen. Nur ein paar Gründe dafür. Im ganzen Buche Prolegomena vermeidet Kant sorgfältig die in der Kritik der reinen Vernunft benutzte Abstraktion „das Ding an sich“; er spricht dort nur von „den Dingen an sich“ als realen Einzelobjekten, die in unser Bewußtsein als „Erscheinungen“ eintreten können. Setzt Kant aber die Dinge außer uns in der Vielzahl, so müssen sie räumlich von einander geschieden sein, und ihrer größeren oder geringeren Entfernung von einander muß auch eine zeitliche Beziehung, z. B. eine Dauer, entsprechen; schon jede Bewegung der Dinge ist raumzeitlich. Wenn er an der gleichen Stelle dann sagt, wir kennten von den Dingen „nur ihre Erscheinungen, d. i. die Vorstellungen, die sie in uns wirken, indem

sie unsere Sinne affizieren“, so werden damit den Dingen unter einander auch Kausalbeziehungen zugesprochen; denn auch unsere Sinnesorgane sind Dinge. Solcher erkenntnistheoretischen Auffassung kann auch der Naturforscher zustimmen, der nur einen Schritt weiter geht, wenn er auf eine prästabilierte Harmonie zwischen dem Raumsinn, dem Zeitsinn und dem Kausalsinn eines Tiers und den entsprechenden Beziehungen auch der Dinge (ohne uns) unter einander schließt. Für den Naturforscher scheint mir solche Deutung unabweisbar zu sein.

Eine beachtenswerte Homologie im Seelenleben von Katze und Mensch zeigt auch der Schlaf mit allen seinen Graden von Tiefe. Im Schlaf ruhen bei der Katze die bewußt-psychischen Verrichtungen, während in ihrem Leibe Dissimilation, Assimilation, Wachstum durch Einbau von Assimilaten usw. ihren Fortgang nehmen, wie im Zustande des Wachens. Ob die Katze im Schlafe träumt, konnte ich nicht mit Sicherheit feststellen. Die Übereinstimmung ihres Schlafes mit dem des Hundes könnte dafür sprechen; denn der Hund zeigt im tiefen Schlafe oftmals durch leises Bellen, Knurren und sonstige Laute an, daß er träumt.

Auf vorstehenden Blättern wurde versucht, ein Stück aus den Geheimnissen des Lebens zu erörtern, denn geheimnisvoll bleiben nach wie vor für uns die Beziehungen zwischen Seele und Leib in der Katze wie in jedem Tier. Geheimnis! Als Naturforscher freut man sich, wenn man den Gedanken von Philosophen zustimmen kann; darum möchte ich noch zwei Stimmen anführen. Goethe, dem man neben dem Range des Dichters und Philosophen auch den des Naturforschers nicht absprechen wird, sagt einmal: „Natur! Wir sind von ihr umgeben und umschlungen — unvermögend, aus ihr herauszutreten und unvermögend, tiefer in sie hineinzukommen. Wir leben mitten in ihr und sind ihr fremd. Sie spricht unaufhörlich mit uns und verrät uns ihr Geheimnis nicht. Sie baut immer und zerstört immer, und ihre Werkstätte ist uns unzugänglich“. — In seiner derberen Sprache erklärt Schopenhauer: „Man kann die Welt nur ganz und gar begreiflich finden, wenn man mit überaus flachem Blick in sie hineinschaut, der keine Ahnung davon zuläßt, daß wir in ein Meer von Rätseln und Unbegreiflichkeiten versenkt sind“.

Diesem Bekenntnis des Ignoramus braucht man allerdings mit Dubois-Reymond noch kein Ignorabimus hinzuzufügen; denn wie es um unser Wissen in einer Million von Jahren bestellt sein wird,

kann niemand voraussagen. Soweit uns vorauszublicken gestattet ist, bleibt dies Wissen allerdings ein provisorisches, ein relatives.

An den Geheimnissen der Natur wenigstens zu rütteln, ist des Naturforschers gutes Recht. Daß Objekt der Naturforschung nicht nur Ponderabilien, sondern auch Imponderabilien wie die Tierseele sind, glaube ich, hinlänglich dargetan zu haben. Im rhytmischen Pulsschlage des Lebens, wie wir ihn von der Zeugung bis zum Tode vor uns sehen, erhalten sich neben den leiblichen auch die seelischen Eigenschaften des Tiers. Die Vererbung des Gemüts neben der leiblichen Gestalt bleibt, wie ich wiederhole, nach meiner Meinung entscheidend für die Zugehörigkeit des Psychischen zur Natur, damit auch der Psychologie zu den Naturwissenschaften. Wenn in der Tierseele kein Platz ist für Wissenschaft, für Kunst, für Religion, für Kultur, so scheiden schon diese letzteren Prärogative den Menschengeist von der Tierseele; auch darauf möchte ich immer wieder hinweisen. Die Katze vollzieht nur Naturgesetze; der Mensch lebt daneben auch nach Kulturgesetzen.

Man mag dies alles eine biologische Theorie nennen. Gewiß ist jede Theorie ein menschliches Kunstprodukt aus Tatsachen, Hypothesen und Phantasie. Theorien sind wandelbar im Laufe der Zeit. Das gilt mit Sicherheit auch von der hier entwickelten tierpsychologischen Theorie. Es liegt mir darum fern, endgültige Formeln konstruieren zu wollen für unsere Erkenntnis des Seelenlebens der Großhirntiere; ich wollte Anregung geben zur Prüfung meiner Gedanken im Weiterverfolg des auf Erfahrung gegründeten Weges der Forschung. Doch bewußt bin ich mir des Umstandes, daß meine Theorie ruht auf dem rocher de bronce einer unerschütterlichen Tatsache: dies ist die **Vererbung** der Anschauungs- und Denkformen, der logischen Gesetze, des Bewußtseins, der Gefühle, des Willens usw. in der Zeugung von Tier und Mensch. Damit werden psychische Vorgänge unweigerlich der biologischen Sphäre zugewiesen.

Zum Schluß möge darauf hingewiesen sein, daß die vorstehend entwickelten Gedanken auch für eine Stellungnahme in der Kardinalfrage der Lebenserscheinungen entscheidend sind. Diese Frage lautet: Ist das Leben, wie wir es kennen, ein elementarer, selbständiger Prozeß, oder ist es ein sekundärer Vorgang, der sich aus den Erscheinungen der leblosen Natur ableiten und erklären läßt? Ich trete für die Selbständigkeit der Lebenserscheinungen gegenüber den anorganischen (elektrischen) Vorgängen in der Natur ein schon auf Grund der psychischen Tatsachen, die doch ganz und gar zum Leben gehören.

Aus dem Allgemeinen Chemischen Universitäts-Laboratorium
Göttingen.

Über die Lage der Doppelbindungen im Ergosterin und seinen Umwandlungsprodukten.

Von

A. Windaus.

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1929.

Über die Lage der drei im Ergosterin vorhandenen Doppelbindungen ist fast nichts bekannt, und es scheint auch sehr schwierig zu sein, durch Abbaureaktionen hierüber etwas zu erfahren.

Ich habe darum als diagnostisches Hilfsmittel die Untersuchung der Absorptionsspektren und die Hydrierung mit Natrium und Alkohol herangezogen. Ich nehme hierbei an, daß, wenn sich mehrfach ungesättigte isomere Kohlenwasserstoffe oder Alkohole in ihrem Absorptionsspektrum unterscheiden, der am stärksten und im langwelligsten Gebiet absorbierende Stoff am ehesten konjugierte Doppelbindungen enthalten wird; und ferner, daß das Vorhandensein konjugierter Doppelbindungen in dem betreffenden Stoff außerordentlich an Wahrscheinlichkeit gewinnt, wenn er im Gegensatz zu seinen Isomeren bei der Hydrierung mit Natrium und Alkohol zwei Atome Wasserstoff aufzunehmen vermag[1]).

Bei der Untersuchung des Ergosterins hat sich nun ergeben, daß es sich mit Natrium und Äthylalkohol zu Dihydro-ergosterin hydrieren läßt[2]); es wird also vermutlich ein System konjugierter Doppelbindungen enthalten. Das mit Salzsäure entstehende Umlagerungsprodukt des Ergosterins, das „Isoergosterin" ist dagegen

1) Über das Verhalten von α-Phellandren, Silvestren und Limonen bei der Hydrierung mit Natrium und Alkohol und über ihr Absorptionsspektrum:

Semmler, Ber. **34**, 3125 [1901] u. **36**, 1033 [1903].

Auwers, Ber. **42**, 4895 [1909].

Hantzsch, Ber. **45**, 553 [1912].

S. auch Journ. Chem. Soc. **99**, 451, 1262 [1911], **123**, 1594 [1923], **125**, 406 [1924].

2) Windaus u. Brunken, Ann. **460**, 232 [1928].

durch Natrium und Alkohol nicht mehr hydrierbar; dasselbe gilt auch für das Ergosterin D[1]). Diese Isomeren werden also vielleicht keine reaktionsfähigen konjugierten Doppelbindungen mehr enthalten. Die Absorptionsspektren der betreffenden Verbindungen sind mit diesen Schlußfolgerungen wohl vereinbar; Ergosterin hat seine Hauptabsorption bei 280 mμ, Iso-ergosterin bei 247 mμ, Ergosterin D bei 240 mμ.

Bei der Ultraviolettbestrahlung des Ergosterins entstehen nacheinander mehrere photochemische Umwandlungsprodukte, in denen sich die Hydroxylgruppe[2]) des Ergosterins und drei Doppelbindungen noch nachweisen lassen. Das erste Umwandlungsprodukt, das als Vitamin D angesprochen wird, hat seine Hauptabsorption bei 270 mμ, es ist, wie das Ergosterin selbst, durch Natrium und Äthylalkohol hydrierbar[3]). Ich schließe daraus, daß in dem ersten photochemischen Reaktionsprodukt ein System konjugierter Doppelbindungen erhalten geblieben ist und daß vielleicht nur eine sterische Umlagerung stattgefunden hat[4]).

Bei der Weiterbestrahlung verschwindet die charakteristische Absorption bei 270 mμ, und es bilden sich Überbestrahlungsprodukte, die erst unter 250 mμ zu absorbieren beginnen und auch durch Natrium und Äthylalkohol nicht mehr hydrierbar sind[5]). Es ist mir also wahrscheinlich, daß bei der Überbestrahlung die ursprünglich vorhandenen konjugierten Doppelbindungen sich voneinander weiter entfernt haben.

Bemerkenswert ist auch das Verhalten des Dehydro-ergosterins, eines Sterins $C_{27}H_{40}O$ mit vier Doppelbindungen, das aus dem

1) WINDAUS u. AUHAGEN, Ann. **472**, 191 [1929].

2) Die mehrfach ausgesprochene Vermutung, daß das Vitamin D ein ungesättigtes Keton sei, scheint mir sehr wenig wahrscheinlich. Das Bestrahlungsprodukt liefert Ester, reagiert nicht mit Hydroxylamin und entwickelt mit Methylmagnesiumjodid ein Mol Methan.

3) Das Dihydro-derivat, das durch Digitonin nicht mehr fällbar ist, läßt sich durch einen krystallisierten Allophansäureester $C_{29}H_{46}O_3N_2$ charakterisieren, der bei 182° schmilzt und für $[\alpha]_D$ die Drehung + 14° zeigt.

4) Über die Absorptionsspektren Stereoisomerer S. BIELECKI u. HENRI, Ber. **46**, 2601 [1913] und ERRERA u. HENRI, C. r. **180**, 2049 u. **181**, 548 [1925].

5) Einige Zwischenprodukte der Bestrahlung sind bisher nur optisch nachgewiesen. Dagegen lassen sich zwei Überbestrahlungsprodukte durch ihre Allophanester gut charakterisieren; der eine Allophanester, der sehr schön krystallisiert, schmilzt bei 215° und zeigt für $[\alpha]_D$ die Drehung + 81°; der andere, der ebenfalls die Formel $C_{29}H_{44}O_3N_2$ besitzt, schmilzt bei 215°, zeigt aber die Drehung $[\alpha]_D = -30°$. Sehr überraschend ist es, daß auch die aus den krystallisierten Estern dargestellten reinen Alhohole bisher nur als zähe Öle erhalten worden sind.

Ergosterin bei der Dehydrierung mit Jodlösung oder mit Mercuriacetat entsteht. Das Dehydro-ergosterin hat seine Hauptabsorptionsbande bei 320 mμ; es kann bei der Behandlung mit Natrium und Propylalkohol nicht nur zwei, sondern sogar vier Atome Wasserstoff aufnehmen. Es ist also wahrscheinlich, daß es nicht nur ein System, sondern sogar zwei Systeme konjugierter Doppelbindungen enthält. Bei der langdauernden Bestrahlung des Dehydro-ergosterins entsteht ein krystallisiertes, noch vierfach ungesättigtes Reaktionsprodukt[1]), dessen Hauptabsorption bei 260 mμ liegt, also in das kurzwellige Gebiet verschoben ist. Dieses Photoprodukt wird durch Natrium und Alkohol noch verändert; ich nehme an, daß bei der Bestrahlung eines der beiden konjugierten Systeme verändert worden ist.

Die hier entwickelten Ansichten habe ich versucht auf anderem Wege zu stützen. Bekanntlich hat O. Diels[2]) in seinen hervorragenden Untersuchungen über Diëne nachgewiesen, daß ein konjugiertes System von Doppelbindungen Maleinsäureanhydrid zu addieren vermag. Die Frage, ob alle konjugierten Systeme Maleinsäureanhydrid anlagern, ist noch nicht geprüft. Bei Betrachtungen am Modell kommt man zu dem Ergebnis, daß diese Addition leicht möglich ist, wenn sich die beiden konjugierten Doppelbindungen in einer offenen Kette oder in einem einzigen Ringe befinden; die Addition von Maleinsäureanhydrid erscheint aber am Modell außerordentlich erschwert, wenn sich die konjugierten Doppelbindungen in zwei kondensierten Fünf- oder Sechsringen befinden.

Die Anwendung der Methode von Diels auf Ergosterine hat nun ergeben, daß von allen bisher untersuchten Verbindungen nur das Dehydro-ergosterin Maleinsäure-anhydrid zu addieren vermag; das Bestrahlungsprodukt des Dehydro-ergosterins addiert kein Maleinsäureanhydrid, ebenso wenig das Ergosterin und seine Isomeren.

Ich möchte daraus schließen, daß nur das Dehydro-ergosterin ein konjugiertes System enthält, dessen Doppelbindungen sich in einem Ringe befinden; bei der Bestrahlung wird dieses System konjugierter Doppelbindungen aufgehoben. Vom Ergosterin nehme ich dagegen an, daß seine beiden konjugierten Doppelbindungen sich in zwei verschiedenen Ringen befinden.

Eine ausreichend begründete Strukturformel für Ergosterin läßt sich bisher nicht aufstellen; doch scheint mir die unten-

1) Windaus u. Linsert, Ann. **465**, 162 [1928].
2) Ztschr. f. angew. Chem. **1929**, 911.

stehende oder eine ähnliche Formulierung mit den bisherigen Ergebnissen in Übereinstimmung zu stehen.

```
       CH2   CH2                               CH    CH2
      /   \ /   \                             //  \ /   \
    HC     CH    CH2                       HC     C      CH2
    ||     |     |                         ||     |      |
    C      CH—CH—C11H23                    C      CH—CH—C11H23
   / \   /                   und          / \   /
 CH   C——CH2                            CH   C——CH2
 ||   |    |                            ||   |    |
 CH   CH   CH                           CH   CH   CH
   \ /  \ //                              \ /  \ //
   CH    CH                               CH    CH
   |                                      |
   OH                                     OH
```

Ergosterin und Dehydro-ergosterin.

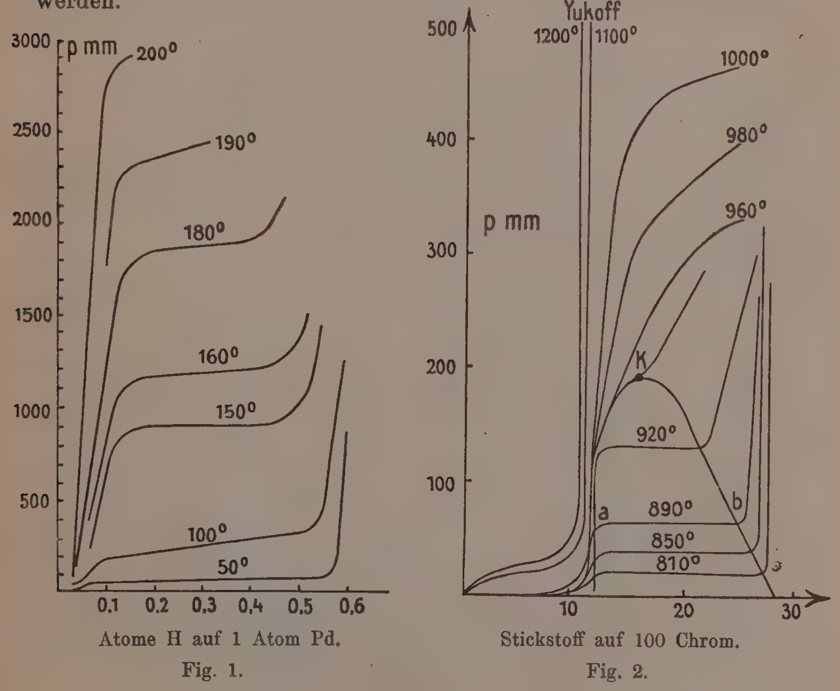
Palladium-Wasserstoff und Chrom-Stickstoff.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Dezember 1929.

Die Unterschiede im Verhalten des Palladiums zum Wasserstoff und des Chroms zum Stickstoff werden im Folgenden vom Standpunkt der Gleichgewichtslehre und der Atomistik beleuchtet werden.



Atome H auf 1 Atom Pd.
Fig. 1.

Stickstoff auf 100 Chrom.
Fig. 2.

Die p-x-Isothermen für Palladium-Wasserstoff (Fig. 1) von Hoitsema [1]) und die für Chrom-Stickstoff (Fig. 2) von Valensi [2]) sind

1) Z. phys. Chem. 17 (1895) S. 1.
2) Journ. Chim. physique 26 (1929), 152 und 202.

einander ähnlich, wenn auch die Temperaturen im Chrom-Stickstoff-Diagramm viel höher liegen.

Der wesentliche Unterschied der beiden p-x-Diagramme besteht darin, daß im mittleren Teile der Isothermen mit wachsendem Wasserstoffgehalt im Palladium der Druck, wenn auch langsam, wächst, während er sich mit wachsendem Stickstoffgehalt im Chrom nicht ändert.

Diesem Unterschied entspricht folgender. Das aus Chromamalgam dargestellte sehr fein verteilte Chrom verliert seinen metallischen Glanz umso mehr, je mehr Stickstoff es enthält, bei einem Gehalt von 27 % Stickstoff bei 800° hat es sich vollständig in ein violettschwarzes Pulver verwandelt, von diesem Stickstoffgehalt an beginnt der Druck mit wachsendem Stickstoffgehalt im Chrom an stark zu steigen[1]).

Bei der Absorption von Stickstoff durch Chrom bildet sich also, nachdem sein Stickstoffgehalt entsprechend der Formel CrN_2 auf 12 % gestiegen ist, als neue Phase CrN, und daher ist der Druck auf den Isothermen von 12 bis 27 % Stickstoff unveränderlich, wie bei anderen Dreiphasengleichgewichten in Zweistoffsystemen, während bei der Absorption von Wasserstoff durch Palladium die Bildung einer neuen Phase nicht eintritt, was dem Anwachsen des Druckes bei der Absorption von 0,05 bis 0,55 Atomen Wasserstoff auf ein Atom Palladium bei 50° entspricht.

Die ersten Mengen beider Gase werden proportional $\sqrt{p}$ absorbiert, woraus Hoitsema nach van't Hoff schloß, daß der Wasserstoff nicht als Molekül, sondern als Atom ins Palladium diffundiert, während auf dem steil aufsteigenden Ast der Isothermen der Wasserstoff als Molekül gelöst wird. Auf Bedenken gegen diese Auffassung wird noch einzugehen sein.

Die Bildung des CrN als neue Phase tritt bei 800° erst bei einem Stickstoffgehalt von über 12 %, entsprechend der Zusammensetzung NCr_2, ein. Bei 800° sind also zwei Kristallarten, deren Zusammensetzung den multiplen Proportionen entspricht, bei einem bestimmten Stickstoffdruck mit einander im Gleichgewicht.

Mit wachsender Temperatur nimmt die Länge der horizontalen Stücke der p-x-Isothermen ab, die Stickstoffgehalte der beiden Phasen nähern sich, und im Punkte k der das heterogene Gebiet

1) Wird kompaktes Chrom in Stickstoffgas erhitzt, so durchläuft seine Farbe die Reihe der normalen Anlauffarben. Die Absorption verlangsamt sich aber so stark, daß ihr Ende nicht abzuwarten ist, weil das Chrom von einer Rinde aus CrN überzogen wird. — Tammann, Z. anorg. u. allg. Chem. 124 (1922), 26.

der festen Phasen Einhüllenden, *akb*, wird die Zusammensetzung der beiden festen Phasen dieselbe. Für die beiden Kristallphasen besteht also ein kritischer Punkt *k*. Die beiden Kristallarten, deren Zusammensetzungen bei 810° nahezu den Formeln NCr und NCr_2 entsprechen, müssen also isomorph sein, und die Abstände der Chromatome in beiden Kristallarten müssen mit wachsender Temperatur und dem Ausgleich ihrer Stickstoffgehalte sich einander nähern und im Punkte *k* einander gleich werden, da sonst *k* nicht die Bedeutung eines kritischen Punktes hätte. Bei Temperaturen oberhalb des Punktes *k* findet der Zerfall in zwei feste Phasen nicht mehr statt, es liegt dann eine Mischkristallreihe vor, die von 0,0 bis über 0,5 Mol Stickstoff hinaus reicht. Die beiden Endglieder zweier Mischkristallreihen, deren Zusammensetzungen bei tieferen Temperaturen nahezu den multiplen Proportionen NCr_2 und NCr entsprechen, bilden sich also durch allmähliche Entmischung einer Mischkristallreihe.

In Fig. 3 sind die Gleichgewichtsdrucke des Wasserstoffs über Palladium in Abhängigkeit vom Palladiumvolumen, welches 2 mg Wasserstoff im Palladiummohr einnehmen, nach C. Hoitsema dargestellt. Auf dem mittleren Stück dieser Isothermen wächst der Druck wie in dem *p*-*v*-Diagramm einer Mischung von 0,33 SO_2 und 0,67 CO_2 nach F. Caubet[1]) (Fig. 4). Nur sind auf den Isothermen des Wasserstoff-Palladium die Uebergänge nach dem Mittelstück nicht Knicke, sondern stark abgerundet. Die Isothermen berühren die Umhüllende *akb* der mittleren Isothermenstücke nicht in ihrem Maximum, sondern im Punkte *k* (Fig. 3), der rechts vom Maximum liegt, ganz in Analogie mit der Berührung im Punkte *k* der Fig. 4. Der Punkt *k* im Wasserstoff-Palladium-Diagramm Fig. 3 hat nicht mehr die Bedeutung, daß in ihm zwei Phasen identisch werden, sondern nur die, daß auf der Isotherme, welche ihn berührt, und auf denen höherer Temperaturen die Mittelstücke der Isothermen tieferer Temperatur fehlen, oder daß von jener Isotherme an eine geringere Wirkung wachsenden Wasserstoffgehalts auf seinen Gasdruck nicht mehr zu bemerken ist.

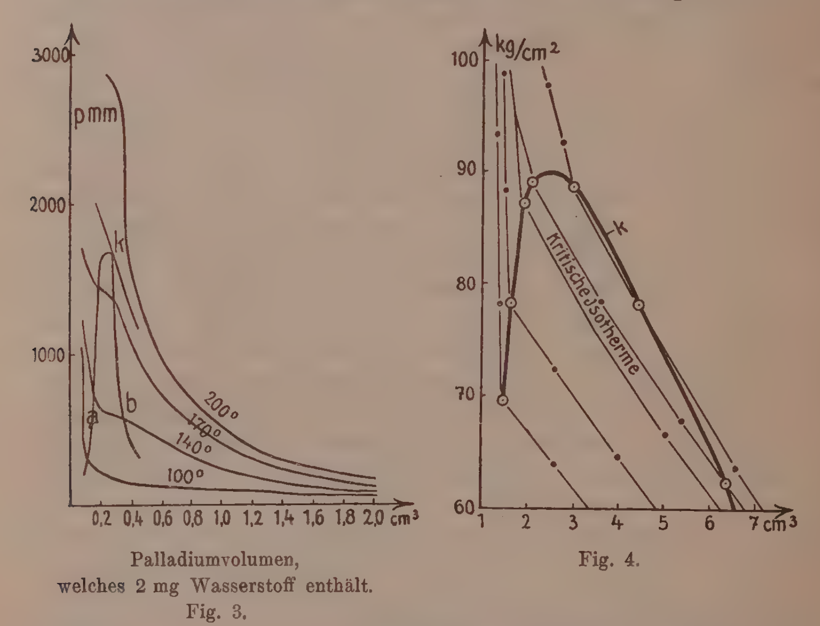
Das *p*-*x*-Diagramm des Stickstoff-Chrom ist ganz analog dem *p*-*v*-Diagramm der CO_2, weil in beiden Gleichgewichte mit nur einem Freiheitsgrad auftreten, und das *p*-*x*-Diagramm des Wasserstoff-Palladium ist ganz analog dem *p*-*v*-Diagramm der CO_2-SO_2-Mischungen, weil in beiden Gleichgewichte mit weniger als zwei Freiheitsgraden nicht bestehen.

---

1) Z. phys. Chem. 40 (1902), 298, Fig. 6.

Vom Standpunkt der Gleichgewichtslehre besteht also zwischen den Systemen Stickstoff-Chrom und Wasserstoff-Palladium ein wesentlicher Unterschied, der dadurch bedingt ist, daß im System Stickstoff-Chrom eine Phase mehr auftritt, als im System Wasserstoff-Palladium oder daß im System Stickstoff-Chrom von gewissen Temperaturen an die eine Kristallphase sich in zwei spaltet, während im System Wasserstoff-Palladium diese Spaltung nicht vor sich geht.

Auf den mittleren Stücken der p-x-Isothermen wächst der Druck mit wachsendem Wasserstoffgehalt im Palladium. Da hieraus auf die Existenz nur einer festen Phase im Gleichgewicht zu



Palladiumvolumen, welches 2 mg Wasserstoff enthält.
Fig. 3.

Fig. 4.

schließen ist, so sind die experimentellen Unterlagen, auf die sich dieser Schluß stützt, von Bedeutung.

Hoitsema[1]) bestimmte die p-x-Isothermen für Palladiummohr, indem er bei 20° dasselbe mit Wasserstoff sättigte, die Temperatur von etwa 10° zu 10° steigerte und den Gleichgewichtsdruck sowie die absorbierte Wasserstoffmenge bestimmte. Die Bestimmungen wurden also bei abnehmendem Wasserstoffgehalt ausgeführt. Aus diesen Daten wurden schließlich die Isothermen der Fig. 1 konstruiert.

1) Z. phys. Chem. 17 (1895), 1.

Im mittleren Teil der p-x-Linien unter 100° wächst der Druck um etwa 50 mm, wenn der Wasserstoffgehalt im Palladium von 0,1 bis 0,3 Mol Wasserstoff zunimmt, und über 100° um mehr als das Doppelte. Bei diesen Versuchen sind die Bedingungen für eine schnelle Einstellung des Gleichgewichts wegen der großen Oberfläche des Palladiums besonders günstig und daher das Ansteigen des Druckes auf den mittleren Teilen der Isothermen erwiesen.

Der geradlinige mittlere Teil der Isothermen geht in die beiden anderen Äste mit kontinuierlich sich ändernder Krümmung über und nicht in einem scharfen Knick, wie wenn ein Dreiphasengleichgewicht zweier Komponenten vorliegen würde.

Diese Feststellungen von Hoitsema wurden für „körniges" Palladium von B. Lambert und S. Gates[1]) bestätigt. Auch sie fanden, daß bei abnehmendem Wasserstoffgehalt der Druck auf dem mittleren Teile der Isothermen bei 103° um etwa 30 mm sinkt, wenn der Wasserstoffgehalt von 0,3 auf 0,1 Mol Wasserstoff abnimmt.

Bei der ersten Wasserstoffaufnahme stellen sich erheblich größere Drucke ein, welche mit wachsendem Wasserstoffgehalt sehr stark ansteigen. Dieser Befund stimmt mit den Angaben von A. Holt überein[2]).

Beim kompakten Palladium ist also besonders bei der ersten Absorption die Einstellung des Gleichgewichts nicht abzuwarten, weil die Absorption mit einer Aufweitung des Palladiums verknüpft ist, die bei tieferen Temperaturen nur durch einen erhöhten Wasserstoffdruck zu erzwingen ist. Dagegen stellen sich im aufgeweiteten Palladium, welches unter etwa 300° seine Aufweitung nur sehr langsam verliert, reproduzierbare Drucke ein, welche als Gleichgewichtsdrucke anzusprechen sind.

Die Diffusionsgeschwindigkeit des Wasserstoffs in verschiedene Palladiumkristallite ist verschieden, je nachdem mit welcher Ebene der Kristallit auf der Oberfläche des Plättchens liegt. Diese Geschwindigkeit ist, wie noch zu zeigen ist, am kleinsten bei den Kristalliten mit einer Würfelebene und am größten bei den mit einer Oktaederebene auf der Oberfläche. Die Folge hiervon ist, daß in einem Teil der Kristallite die Wasserstoffaufnahme schneller vor sich geht, als in einem anderen, und daher auch ihr Volumen schneller zunimmt. In der Tat tritt bei der Absorption von Wasserstoff auf einem polierten Palladiumplättchen ein Teil der Kristallite aus der Oberfläche hervor und mit der Menge des absorbierten

1) Proc. Roy. Soc. London 108 (1925), 456.

2) A. Holt, E. C. Edgar und J. B. Firth, Z. phys. Chem. 82 (1913), 513.

Wasserstoffs nimmt die Zahl dieser Kristallite zu. Hierbei handelt es sich aber nicht um eine Zerteilung einzelner Kristallite in mehrere verschiedenen Wasserstoffgehalts, sondern um das Hervortreten vorhandener Kristallite. Im einzelnen größeren Korn treten Unterschiede im Relief seiner Ebene bei der Beladung mit Wasserstoff nicht hervor.

Die Änderung des Gitterparameters des Palladiums bei der Beladung mit Wasserstoff ist von J. O. Linde und G. Borelius[1]) näher verfolgt worden. Sie fanden den Gitterparameter des Palladiums bei Drucken, die kleiner sind als die im mittleren Teil der Isothermen, zu 3,87 bis 3,91 Å, und bei Drucken, die größer sind, zu 3,98 Å. Bei Drucken, welche Gleichgewichtsdrucken des mittleren Teils der Isothermen entsprechen, wurden keine Bestimmungen ausgeführt. Es ist zu erwarten, daß bei diesen nach Einstellung des Gleichgewichts alle Kristallite denselben Gitterparameter haben werden, entsprechend der Gleichheit der Wasserstoffkonzentration in allen Kristalliten, und daß diese Parameter zwischen den oben angegebenen liegen werden.

Wenn aber im Palladium die Wasserstoffkonzentration nach einer Änderung des Druckes oder der Temperatur in verschiedenen Kristalliten noch eine verschiedene ist, so können auch Kristallite mit ganz verschiedenen Werten des Parameters vorkommen, welche auch von beiden Beobachtern gefunden wurden. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, daß im Gleichgewichtszustande im Palladium zwei Kristallitenarten, zwei Phasen verschiedenen Wasserstoffgehalts vorhanden sind, sondern nur, daß sich das Gleichgewicht noch nicht hergestellt hatte.

Wird der Wasserstoff als Atom oder als Molekül vom Palladium gelöst?

Aus der Absorptionswärme des Wasserstoffs im Palladium kann die Bildungswärme von Palladiumwasserstoff berechnet werden. Je nachdem der Wasserstoff als Atom oder Molekül im Palladium gelöst ist, ergeben sich zwei Werte, welche um die Dissoziationswärme des Wasserstoffmoleküls in Atome verschieden sind. Mit der leichten Zersetzlichkeit des Pd_2H ist seine Bildungswärme aus Wasserstoffatomen nicht vereinbar.

Nach Mond, Ramsay und Shields[2]) werden bei der Absorption von einem Mol Wasserstoff in 4 Mol Palladium 9362 cal ent-

1) Ann. d. Physik 84 (1927), 747.

2) Phil. Trans. Roy. Soc. 191 A (1898), 105.

wickelt, GILLESPIE und HALL[1]) berechneten aus den $\left(\frac{dp}{dT}\right)_x$-Werten diese Absorptionswärme zu 8780 bis 8450 cal.

Die Absorptionswärme, AW, von einem Mol Wasserstoff in 4 Mol Palladium kann als Summe folgender Wärmen aufgefaßt werden:

1) Kompressionswärme, KW, von einem Mol Wasserstoff vom Volumen seines Gleichgewichtsdruckes auf das Volumen von 4 Mol Palladium.

2) Dehnungswärme, DW, von 4 Mol Palladium von seinem Volumen auf das Volumen von Pd_2H.

3) Dissoziationswärme, Q, der Wasserstoffmoleküle in Wasserstoffatome.

4) Verbindungswärme von Wasserstoffatomen oder Wasserstoffmolekülen mit Palladium.

$$AW = KW - DW - Q + W$$

$$9000 \quad 1000 \quad -1000 \quad 90\,000$$

$$W = 99\,000, \text{ oder } W = 9000, \text{ wenn } Q = 0 \text{ ist.}$$

Die ungeheure Bildungswärme aus Wasserstoffatomen entspricht nicht der Zersetzlichkeit von Pd_2H.

Wenn auch der Druck bei der Aufnahme der ersten Wasserstoffmengen durch Palladium proportional dem Quadrate der im Palladium vorhandenen Wasserstoffkonzentration anwächst, so braucht man hieraus noch nicht den Schluß zu ziehen, daß der Wasserstoff im Palladium als Atom gelöst ist. Denn der Kreisprozeß, mit dessen Hilfe VAN'T HOFF[2]) das HENRYsche Gesetz und dessen Modifikationen für die Änderung des Molekulargewichts beim Übergang aus der einen in die andere Phase ableitete, muß ein reversibler sein. Für Gase und Flüssigkeiten trifft diese Forderung zu, bei der Wasserstoffabsorption durch Palladium aber nicht. Der Druck, unter dem der Wasserstoff absorbiert wird, ist größer als der Druck, unter dem er entwickelt wird. Besonders über kompaktem Palladium sind diese Unterschiede sehr bedeutend. Daher darf man den Schluß auf die Einatomigkeit des absorbierten Wasserstoffs aus der Abweichung vom HENRYschen Gesetz anzweifeln und diese Abweichung auf die Dehnungsarbeit des Palladiumgitters zurückführen.

Der Schluß auf die Einatomigkeit des im Palladium gelösten Wasserstoffes ist vom atomistischen Standpunkt gebilligt worden,

1) Journ. Amer. Soc. 48,1 (1926), 1217.
2) Z. phys. Chem. 5 (1890), 322.

weil das Wasserstoffatom sich leichter als das Wasserstoffmolekül durch die Maschen des Palladiumgitters bewegen kann. Es scheint aber doch auch die Möglichkeit vorzuliegen, daß auch das Wasserstoffmolekül im Palladium diffundieren kann.

Der Durchmesser des Wasserstoffmoleküls wird auf 0,9 bis $2{,}0.10^{-8}$ cm geschätzt. Der Parameter a des Palladiumgitters ist zu $3{,}95.10^{-8}$ cm bestimmt. Der Durchmesser des Palladiumatomes ist unbekannt. Die Seiten der rhombischen Maschen der Oktaedernetzebenen und die Durchmesser der ihnen eingeschriebenen Kreise haben die Längen $\frac{2a}{\sqrt{2}} = 5{,}6.10^{-8}$ cm. Es wäre also wohl möglich, daß ein Wasserstoffmolekül als solches die rhombischen Maschen passieren könnte, besonders wenn die Palladiumatome bei ihren Schwingungen in gewissen Phasen derselben ihre Abstände vergrößern.

Die Absorption von Wasserstoff durch Palladium bei wachsendem Druck auf dem dritten Ast der p-x-Isothermen vollzieht sich nicht nach einem linearen, sondern nach einem logarithmischen Gesetz[1]), was aus den Messungen von B. Roozeboom[2]) folgt. Die absorbierte Menge x wächst mit dem Druck nach der Gleichung

$$x = a \log p + b.$$

Extrapoliert man aus den Angaben von Roozeboom für 25° bei $p = 1163$ mm, $x = 0{,}662$ Atome, und $p = 1717$ mm, $x = 0{,}668$ Atome Wasserstoff linear den Wasserstoffgehalt, so sollten bei 100 kg/cm² 1,5 Atome von 1 Atom Palladium und bei 1000 kg/cm² 9 Atome von 1 Atom Palladium aufgenommen werden. Bei elektrolytischer Beladung von Palladium mit Wasserstoff bei 1000 kg/cm² wird aber nicht merklich mehr Wasserstoff aufgenommen als bei 1 kg/cm². Auch bei tieferen Temperaturen ist die Aufnahme von elektrolytisch-entwickeltem Wasserstoff durch Palladium nicht größer als bei 20° (0,70 Atome Wasserstoff pro Atom Palladium), bei −65° werden bei elektrolytischer Beladung von 1 Atom Palladium 0,7 Atome Wasserstoff aufgenommen[1]).

Zur Atomistik.

Das Gitter des Chroms ist ein kubisches, raumzentriertes, das aus zwei einfachen kubischen besteht. Die Punkte des einen Gitters besetzen die Würfelmitten des anderen. Der Würfelebene des

1) H. O. v. Samson, Z. anorg. u. allg. Chem., Bd. 187, 1930.
2) Z. phys. Chem. 17 (1895), S. 23 u. 27.

einen Gitters, besetzt mit Kreisen (Fig. 5), folgt die des anderen, besetzt mit Kreuzen. Zwischen je zwei mit Kreisen besetzten Netzebenen liegen die mit Kreuzen besetzten. Die kleinsten Zellen des Gitters sind Oktaeder (Fig. 6).

Wenn in allen Oktaedern je ein Stickstoffatom, oder in abwechselnden ein Stickstoffmolekül sich befindet, so kommt ein Stickstoffatom auf je zwei Chromatome, oder ein Stickstoffmolekül auf

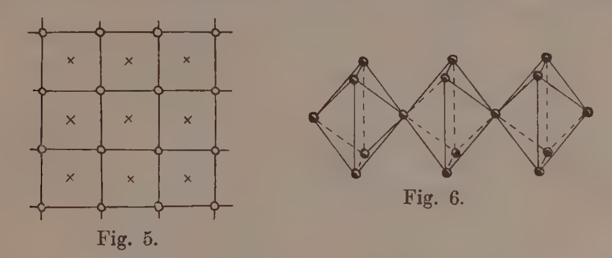


Fig. 5. Fig. 6.

vier Chromatome. Der Zusammensetzung Cr_2N entspricht je ein Stickstoffmolekül in jeder oktaedrischen Zelle.

Beim Palladium-Wasserstoff liegen die atomistischen Verhältnisse wesentlich anders. Das Gitter des Palladiums ist ein kubisches flächenzentriertes, dessen kleinste Raumelemente tetraedrische Zellen sind. Die Kanten dieser Tetraeder verlaufen parallel den Diagonalen der Würfelebenen. Je zwei dieser Tetraeder (Fig. 7) bilden eine prismatische Zelle. Die Schnitte der Oktaederebenen durch

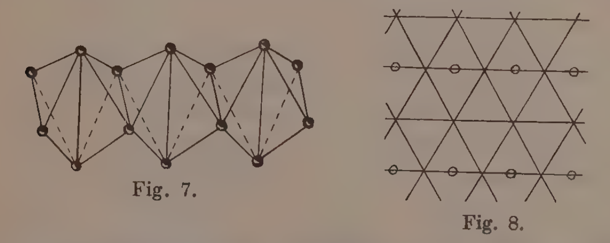


Fig. 7. Fig. 8.

diese Prismen entsprechen den rhombischen Maschen der oktaedrischen Netzebenen (Fig. 8). Die Schnittpunkte der Gittergeraden sind mit Palladiumatomen besetzt, die Kreise bezeichnen Wasserstoffatome. Bei dieser Besetzung kommt auf je zwei Palladiumatome ein Wasserstoffatom. Dasselbe Mischungsverhältnis ergibt sich, wenn in abwechselnden Reihen rhombischer Maschen abwechselnde Maschen mit Wasserstoffmolekülen besetzt sind. Dem Mischungsverhältnis PdH würde die Besetzung aller prismatischen Zellen oder aller rhombischen Maschen mit je einem Wasserstoff-

atom entsprechen, oder die abwechselnder Maschenreihen mit Wasserstoffmolekülen.

Wenn bei der Beladung des Chrom- oder Palladiumgitters das Mischungsverhältnis vier Metallatome und ein Gasmolekül erreicht wird, so sind im Chromgitter seine kleinsten Zellen abwechselnd mit Stickstoffmolekülen besetzt, die weitere Beladung bringt benachbarte beladene Zellen zur Abtrennung als besondere Phase, CrN. Bei der Beladung des Palladiumgitters mit Wasserstoffmolekülen sind bei jenem Mischungsverhältnis in abwechselnden Reihen prismatischer Zellen nur abwechselnde Zellen mit Wasserstoffmolekülen besetzt, also nur die halbe Zahl der Zellen wie im Chromgitter. Daher ist zu erwarten, daß, wenn es beim Chrom bei Überschreiten jenes Mischungsverhältnisses zur Bildung der neuen Phase, CrN, kommt, beim Palladium die Bildung der neuen Phase PdH nicht eintreten wird, vorausgesetzt, daß die Attraktionen der Atome in beiden unbeladenen Gittern und die von Chrom zu Stickstoff und von Palladium zu Wasserstoff von der gleichen Größenordnung sind.

Bei 800° ist die Zusammensetzung der beiden Chromnitride nahezu Cr_2N und CrN, im Gitter des Cr_2N sind abwechselnde Oktaederzellen mit Stickstoffmolekülen, im Gitter des CrN sind alle mit Stickstoffmolekülen besetzt. Wesentlich ist, daß beide Gitter noch kubisch raumzentriert sind. Wächst nun die Temperatur, so wächst der Stickstoffdruck in der Gasphase an, und außerdem nähert sich der Stickstoffgehalt beider Phasen einem mittleren Werte, bis im kritischen Punkt k der Stickstoffgehalt beider Kristallarten derselbe wird, wodurch beide identisch werden. In vielen anderen Fällen, wie in den Mischkristallreihen der Natrium- und Kaliumsalze, tritt ein kritischer Punkt nicht auf, obwohl die das heterogene Gebiet Umhüllende eine ähnliche Form hat.

Wenn die ersten Wasserstoffmoleküle ins teilweise geweitete Palladiumgitter gehen, so wächst der Druck proportional dem Quadrat ihrer Zahl[1]), weil noch wachsende Widerstände des der Weitung widerstrebenden Gitters bestehen, erst wenn ein Teil der Zellen mit Molekülen besetzt sind, so sind dadurch benachbarte Zellen so geweitet, daß $\left(\frac{dp}{dx}\right)_T$ stark abnimmt. Nachdem etwa ein Viertel der Zellen besetzt ist, wächst $\left(\frac{dp}{dx}\right)_T$ sehr schnell, weil der Zusammenhang des Palladiumgitters noch sehr groß ist. Die Überschreitung

1) A. Sieverts, Z. phys. Chem. 88 (1914), 451.

der Zusammensetzung Pd_2H ist verständlich, da bei ihr nur ein Teil der prismatischen Zellen mit Wasserstoffmolekülen besetzt ist.

Die Chromnitride Cr_2N und CrN sowie der Palladiumwasserstoff Pd_2H dürfen nicht als Verbindungen der betreffenden Atome aufgefaßt werden, da ihre Zersetzlichkeit mit ihrer großen Bildungswärme, welche für Atomverbindungen folgen würde, im Widerspruch steht. Man hat sich diese Verbindungen als die der Gasmoleküle mit den Atomen der Metallgitter zu denken und dementsprechend zu schreiben: $Cr_4(N_2)$, $Cr_2(N_2)$ und $Pd_4(H_2)$. Aber auch diese Formeln geben nicht ein vollständiges Bild der Struktur dieser Körper, welches erst durch das Raummodell vermittelt wird.

Die Diffusionswege des Wasserstoffs im Palladium.

Die Mischkristallreihen von Palladium mit Gold, Silber oder Kupfer absorbieren kathodisch an ihnen entwickelten Wasserstoff nur bis zum Palladiumgehalt von 0,5 Mol Palladium. Von L. Nowack[1]) wurde diese Grenze bei 20° für Palladium-Kupfer-Mischkristalle zwischen 0,52 und 0,48 Mol Palladium und für Palladium-Silber-Mischkristalle zwischen 0,51 und 0,49 Mol Palladium eingeengt. Molekularer Wasserstoff wird von kompaktem Palladium und seinen Mischkristallen bei 20° zu langsam aufgenommen, als daß man seine Löslichkeit bestimmen könnte, aber bei erhöhter Temperatur wurde von A. Sieverts[2]) festgestellt, daß seine Löslichkeit in Palladium-Silber-Mischkristallen bei 0,5 Mol Palladium außerordentlich schnell abnimmt. Mischkristalle, die noch ärmer an Palladium sind, absorbieren allerdings noch größere Mengen Wasserstoff, was darauf zurückzuführen ist, daß bei den betreffenden Temperaturen der Platzwechsel im Mischkristallgitter schon recht lebhaft ist, wodurch auch andere scharfe Einwirkungsgrenzen überschritten werden.

Aus der Löslichkeitsgrenze für Wasserstoff in Palladiummischkristallreihen ist zu schließen, daß die Wasserstoffmoleküle im Palladium und seinen Mischkristallreihen parallel den Würfelkanten oder den Körperdiagonalen des Würfels diffundieren, denn bei 0,5 Mol Palladium verschwinden in diesen Richtungen bei normaler Verteilung zweier Atomarten im kubischen flächenzentrierten Gitter die nur mit Palladiumatomen besetzten Gittergeraden[3]).

Die Frage, ob die Wasserstoffmoleküle in den Richtungen der Würfelkante oder den der Körperdiagonale des Würfels wandern, wurde zu Gunsten der Körperdiagonale entschieden, denn das

---

1) Z. anorg. u. allg. Chem. 113 (1920), 14.

2) A. Sieverts, Jurich und Metz, Z. anorg. u. allg. Chem. 92 (1915), 329.

2) G. Tammann, Z. anorg. u. allg. Chem. 107 (1919), 97—99.

Maximum der Absorptionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Kristallitenorientierung wird für Oberflächen beobachtet, auf denen die meisten Kristallite mit Ikositetraederebenen liegen[1]). Diese Ebenen schneiden die Oktaederebenen, auf denen die Körperdiagonalen des Würfels senkrecht stehen, unter viel kleinerem Winkel, als die Würfel- oder Dodekaederebenen.

Die Wasserstoffmoleküle wandern also bei 20° durch die rhombischen Maschen der Oktaederebenen, und in Palladiummischkristallreihen erfolgt das bis zu den Stellen der Gittergeraden senkrecht zu den Oktaederebenen, an denen die Ecken der rhombischen Maschen von vier fremden Atomen besetzt sind.

E. Rupp[2]) hat neben den Reflexionsmaxima von Elektronenwellen in Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit an Oktaederebenen des Nickels noch schwächere Reflexionsmaxima erkannt, wenn das Nickel mit sehr geringen Wasserstoffmengen in Berührung gewesen war. Die Reflexionsmaxima des Nickels und die des Wasserstoffs haben die gleichen Abstände. Hieraus schloß er, daß die Wasserstoffatome alle dreieckigen Maschen der Oktaedernetzebenen besetzen, da bei teilweiser, regelloser Besetzung die Interferenzmaxima des Wasserstoffs nicht auftreten könnten.

Ob ein Wasserstoffatom oder ein Wasserstoffmolekül auf eine dreieckige Masche entfällt, kann aus der Lage der Reflexionsmaxima nicht abgeleitet werden.

Die Aufnahmefähigkeit der Oberfläche des Nickels für Wasserstoff ist also viel größer als die seines Inneren.

Der Befund von Rupp betreffs der Einlagerung der Wasserstoffmoleküle in die rhombischen Maschen der Oktaedernetzebenen stimmt mit den aus den Löslichkeitsgrenzen und der Absorptionsgeschwindigkeit sich ergebenden überein, da dem Nickel und dem Palladium die gleiche Gitterart zukommt.

---

1) G. Tammann und J. Schneider, Z. anorg. u. allg. Chem. 172 (1928), 43.

2) Z. Elektrochemie 35 (1929), 586.

Die Araceae Deutsch-Ostafrikas.

Von

A. Peter.

Vorgelegt in der Sitzung am 22. November 1929.

Die von mir bei mehrjährigem Aufenthalt in Afrika beobachteten dort einheimischen Araceen ziehen das Interesse durch Formenreichtum, morphologische und biologische Eigentümlichkeiten, verwandtschaftliche Zusammenhänge und durch ihre Verbreitungsverhältnisse auf sich. Aus dem Gebiet von Deutsch-Ostafrika sind bisher in 12 Gattungen 31 Arten beschrieben worden. Von diesen traf ich selbst dort 10 Genera mit 17 Spezies an. Schon meine erste Expedition 1914/19 hatte eine nicht geringe Zahl derselben ergeben; die zweite Expedition 1925/26, die bei zweckmäßigerer Ausrüstung mit größeren Mitteln, besser eingearbeitetem Sammlerpersonal und vor allem mit größerer Erfahrung ausgeführt werden konnte als die erste Reise, fügte noch eine erhebliche Schar von Neuheiten hinzu, sodaß die hier folgende Zusammenstellung der insgesamt aus Deutsch-Ostafrika bisher bekannten Araceae einschließlich 2 neu beschriebener Genera und 15 neuer Spezies die Zahl 46 erreicht. Dazu kommen noch 5 neue Varietäten.

Eine Bereicherung ihres Artenbestandes erfahren durch meine Funde insbesondere die Gattungen *Amorphophallus* um 3, *Stylochiton* durch 7 neue Arten, und bemerkenswerter Weise die Tribus der *Zamioculcaseae* durch 5 Arten in 3 Gattungen, von denen 2 hier zuerst bekannt werden: *Heterolobium* und *Microculcas*. Die bisher monotypische Gattung *Zamioculcas* wird um 1 neue Art erweitert. Sämtliche *Zamioculcaseae* weisen das sog. „Knie“ auf, eine eigentümliche Verdickung des Blattstieles, die sich bei *Gonatopus* an den Stielchen der 3 Haupt-Fiederabschnitte des Blattes wiederholen kann. Sie ist auch anatomisch nachweisbar.

Araceae.

Perianth fehlt.

♀ Teil der Infloreszenz der Spatha angewachsen, die Blüten daher einseitig.

♀ Blüten einzeln. Schwimmendes Kraut. 1. **Pistia.**

— — 3—12. Waldpflanze. 2. **Callopsis.**

— — — — von der Spatha frei, die Blüten daher rundherum stehend.

Spadix mit endständigem blütenlosen Fortsatz. Wurzelstock knollig.

Blätter und Blüten gleichzeitig. Ränder der Spatha bis zum Grunde frei. Keine Blütenrudimente über den ♀ Blüten vorhanden.

Monoecisch. Blätter einfach, schildförmig, herz-eiförmig. 3. **Colocasia.**

Dioecisch. Blätter fußförmig geteilt. 4. **Arisaema.**

— — — zu verschiedenen Zeiten entwickelt.

Ränder der Spatha zusammengewachsen. Rudimente über den ♀ Blüten vorhanden. Blätter fußförmig. 5. **Sauromatum.**

Spatha unten gerollt. Keine Rudimente. Blätter zuerst 3-, dann 2-teilig. 6. **Amorphophallus** = Hydrosme.

Spadix ohne terminalen sterilen Fortsatz.

Stammlos. Stauden mit knolligem Wurzelstock.

Spadix mit Blütenrudimenten im Spitzenteil. Sumpfpflanze. 7. **Typhonodorum.**

— — — zwischen den ♂ und ♀ Blüten. Landpflanzen.

1 Samenanlage in jedem Fruchtknotenfach. Blatt zuerst 3-teilig, darauf fiederschnittig und 2-teilig. 8. **Anchomanes.**

2—4 — — — —. Blatt pfeilförmig. 9. **Richardia.**

Stamm mittelst Wurzeln kletternd. Blätter einfach. 10. **Culcasia.**

Perianth vorhanden. ♀ Teil der Infloreszenz frei.

Ränder der Spatha unten oder fast bis zur Spitze zu einer Röhre verwachsen. Perianth in einem Stück, krug- oder becherförmig. Blattstiel ohne Knoten. 11. **Stylochiton.**

Spatha unten gerollt. Perianthabschnitte frei. Blattstiel mit einem ± verdickten „Knie“.

Staubblätter mit verwachsenen Filamenten. Nur 1 einjähriges bis 3-fach gefiedertes Blatt, dessen Abschnitte sämtlich

± gestielt sind. Die Antheren öffnen sich mit spitzenständigen Poren. 12. **Gonatopus.**

— mit freien Filamenten. Die Antheren öffnen sich mit Querrissen.

♀ Blüten mit Staubblattrudimenten.

Narbe kopfig, ein wenig gestielt. Rhizom kurz, derb, kriechend. Blätter zu mehreren, groß, immergrün, einfach gefiedert. — Pollen in fadenförmigen Massen zusammenhängend. 13. **Zamioculcas.**

— pilzförmig, sitzend. Rhizom knollenförmig. Blatt einzeln, einjährig, 2—3-fach gefiedert, Fiedern z. T. zerschlitzt. 14. **Heterolobium** n. gen.

— — ohne Staubblattrudimente. Narbe nicht kopfig, aber kurz 2-lappig mit quergestellten Lappen, unmittelbar dem Fruchtknoten aufsitzend. Knollenpflanzen. Blätter doppelt gefiedert, einzeln am Sproß, jedoch öfters 2 oder 3 auf der Knolle, zur Trockenzeit vergänglich. 15. **Microculcas** n. gen.

1. Pistia Linn.

P. Stratiotes Linn. Spec. pl. ed. 1 (1753) 963. — Schwimmendes Kraut mit Blattrosette. Vegetative Vermehrung durch Ausläufer. — Verbreitung in den warmen Gebieten beider Halbkugeln der Erde: Texas![1] Florida! TropCAmerika! Westindien! Guatemala! Guiana! Columbia! Peru! Brasilien! Paraguay! Uruguay! Argentinien! Ostindien! Malesien! Java! Philippinen! Formosa! Tonkin! Neuguinea! Senegambien! Liberia! Niger! Ashanti! Schari! Sennaar! Aethiopia! Kordofan! Tschadsee! Nilländer! Galla! Togo! Kamerun! Nubien! Kongoländer (UKongo!, Kongobecken!). Angola! Nyassaland! Kapland! Transvaal! Natal! Mossambik! Comoren! Madagascar! Sansibar II (Hildebrandt 1201!). BritOAfrika: Bustyuma bei Ndara I (Hildebrandt 2356!); Zuflußbach am Südende des Djipe-See 710 * X, Z^4 (P 14141)[1].

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: Bagamoyo * XII (? Holst 4180!); am Ruwu-Fluß 350 m auf feuchtem Lehmboden IX (Brehmer

1) **Zeichenerklärung.** * blühend, ⁻ nicht blühend, • Knospen, ⁺ verblüht, ⁰ Frucht.

Römische Zahlen geben den Monat an, arabische die Erhebung über dem Indischen Ozean in m. V^{1-5} Z^{1-5} = Vorkommen und Individuenzahl in 5 Stufen.

! bedeutet: „getrocknete Exemplare vom Verfasser gesehen“.

!! der Verf. hat die lebende Pflanze am Fundort selbst beobachtet.

P = „Herbarium APeter No. ...“.

757 !, im Wasser 756 !); kleiner See von Magomeni bei Daressalam * ^{0} VIII, $V^{1}Z^{4-5}$ (P 44581); Msindossi bei Daressalam klein $^{-}$ IV (P 39392); See von Buharati bei Daressalam * VIII, $V^{1}Z^{5}$ (P 44635); im See von Mbagara bei Daressalam * VIII, $V^{1}Z^{5}$ (P 44939, * IX, 45099); bei Soga * ^{0} (P 44718). — Tanga: im Teich bei Kigombe IV, Z^{3} !! — Udigo: Amboni → Pande bei der Sigibrücke, treibt im Sigi-Fluß * IV, $V^{1}Z^{3}$!! — Handeï: Sigi-Fl. unterhalb der Brücke von Pandeni 300 m IX = chatende, bedeckt den Fluß völlig !!; im Sigi-Fl. bei Longusa 300 m III, Z^{5} !! — Ost-Usambara: Kilemele-See im Luengera-Tal Kijango → Mashewa 400 m VIII, Z^{3} (P 13145); Kumba-Sumpf bei Mashewa 450 m VIII, Z^{2} (P 13176). — WUsambara: im Mombo-Bach bei Mombo 440 m * VI, Z^{3} (P 40719); Mkomasi-Fl. in Gomba bei Makuyuni 450 m * II, Z^{3-4} (P 15421); See von Makuyuni 420 m * II, Z^{3} (P 15448). — Useguha: im Bach bei Mnyussi VIII !!; Pangani-Inseln bei Hale 180 m I !!; Hale, zwischen der Großen Panganibrücke und den Kleinen Panganifällen 330—300 * V, $V^{1}Z^{2}$ in kleinen Tümpeln !!; Hale, Große Brücke → Ngombezi 300 * V !!; Hale → Kwamkwe, Wasserloch in einer Pflanzung 300 * V, $V^{1}Z^{2-3}$!! — SüdPare: Manga-See bei Buiko, brakiges Wasser 400 * X, V^{1} Z^{3-4} (P 14095). — Kilimandscharo-Gebiet: Njiri-See VI (SCHILLINGS 2 = jungijungi [Suaheli] !). — Meru-Gebiet: Engili-See 1500 m * XI (UHLIG 725 !) = kingali (Kinyassi), dient zur Salzbereitung. — Tabora: Nyembe ! = malebe. — Victoria-See, Ukerewe: Neuwied 1150 VI (CONRADS 347 !). — Irangi: Kondoa Irangi, im Bura- (= Biche-) See 1350 ^{0} VIII, $V^{1}Z^{3-4}$ (P 44389); Sseria-See bei Kondoa Irangi 1350 VIII, Z^{2} (P 44536). — Kiwu-Vulkane: Ruhondo-See 1760 XII (MILDBRAED 1822 !). — Mossambik: im Fluß Pungwe bei Beira IX noch klein, Z^{2-3} !!.

Die Gattung Pistia ist in mehreren Formen, die ich jedoch hier nicht berücksichtigen kann, weil ihre Konstanz noch nicht sicher steht, nur in einer einzigen Art vorhanden. Was ich in DOAfrika von gestaltlichen Modifikationen derselben beobachtet habe, schien mir von standörtlichen Verhältnissen — Änderung der Wassertiefe, auf Land geraten infolge Austrocknens von Tümpeln und flachen Seebuchten — und vom Alter der Exemplare abhängig zu sein. Die Pflanze kommt in den Seen zuweilen in sehr großer Menge vor, sie treibt in den Flüssen und Strömen, kann ruhigere Stellen der Flußläufe mit einem lückenlosen herrlich grünen Scheinrasen so überdecken, daß vom Wasser nichts mehr zu sehen ist; sie kann aber auch in ganz kleinen Tümpeln wachsen

und geht, wenn die Gewässer trocken gelegt werden, nicht zugrunde. Denn zwar sterben die äußeren großen Blätter der Rosette ab, aber die inneren noch jungen Blätter vermögen sich wegen der Wasserhaltigkeit der schwammigen Gewebe im Blattgrunde und in den Wurzeln noch lange Zeit lebend zu erhalten, namentlich auch die tief unten in den Blattachseln versteckten Blüten und Früchte zu umhüllen, vor dem Verderben zu schützen und das Reifen der Samen auch unter recht ungünstigen Verhältnissen zu gewährleisten. — Vielfach kann man die Gewohnheit der Negerfrauen beobachten, einige Pistia-Pflanzen in die kleinen Tümpel bezw. Löcher zu stecken, aus denen in der Trockenzeit das Gebrauchswasser entnommen werden muß: auf Befragen geben sie an, daß durch die Pflanze das Faulwerden des Wassers verhindert werden könne.

2. **Callopsis** Engl.

C. Volkensii Engl. in Berl. Notizbl. 1 (1895) 27; Engl. OAfr. C (1895) 255 fig. 173; Pflanzenreich IV, 23 F (1920) 58 fig. 8. — Wurzelfasern spindelförmig verdickt. Spatha weiß, seltener rosa. — In DOAfrika endemisch.

Deutsch-Ostafrika, Mlinga-Gebirge: Longusa → Magrotto 325—500 * I, III, XI Z^4; daselbst beim Dorf Manyesse 350 * V, $V^1 Z^3$ (P 40007); in der Gegend von Magila 370 * II, Z^4 (P 19587 Spatha weiß oder rosa). — Handeï: Muhesa → Longusa 100—170 * IX (Engler 341!, 399!); Urwald Longusa → Sigi 320 * V, $V^1 Z^3$ (P 10201); Sigi → Pandeni 400 * weiß III, V !!; Kulemuzi-Brücke bei Pandeni 300 * III, * IX !!; Urwald Pandeni → Longusa 280—400 * V, $V^3 Z^3$ (P 10137, 10167); Urwaldparzelle km 21.5 beim Dorf Bumbuli 430 * III, $V^2 Z^2$ (P 19772); steiler bewaldeter Abhang über Longusa → Sigi 275—500 * V, $V^1 Z^3$ (P 40067); Uferwald des Sigi unterhalb Longusa 250 * XI, Z^2 (P 19956, 22002); Urwald Longusa → Maramba 300 * VI, * XI !!; Maramba → Maneno Mbangu im Walde 280—300 * XII, Z^2 !!; Mhinduro → Maneno Mbangu 280 * VI (P 20955); bei Kwatumbili 280 $^-$!!; Urwald bei Kwamtilli 300 * X, * XII, Z^4 (P 25223); Wald bei Maneno Mbangu 280 * X !!. — Ost-Usambara: Longusa → Derema 400—600 m (Engler 440 !); Sigital unterhalb Derema 800 * I [1]) ! (Volkens 49 !); Kwamkoro → Mnyussi, oberhalb der Sägemühle von Mnyussi 400 * I (P 332, 3126). — West Usambara: Erudja-Gebirge * II (Buchwald 234 !). — Useguha: Pflanzung Hale 280 *

1) Nicht nur „am Grunde von Bäumen“, sondern frei im Waldboden zerstreut.

VI, $V^1 Z^2$ (P 4504); auf der Dorfinsel Hale im Pangani-Fl. 280 * VIII, Z^3 (P 24377); Uferwald am Pangani bei der Insel kwa Kilanga 250 * VIII, Z^3 (P 24496).

Diese kleine Pflanze mit der hübschen weißen Spatha ist unter den ostafrikanischen Araceen dadurch ausgezeichnet, daß der weibliche Abschnitt des Blütenstandes mit der Spatha verwachsen ist. Sie dürfte bei gärtnerischer Kultur eine gute Erwerbung für den Blumentisch abgeben und, da sie Farbenunterschiede in freier Natur zeigt, für die Zucht von Gartenformen geeignet sein.

3. **Colocasia** Schott.

C. antiquorum Schott Melet. 1 (1832) 18; Hook. f. in Bot. Mag. (1894) tab. 7364. — Der sterile Anhang des Spadix ist so lang wie der ♂ Teil des Blütenstandes.

Verbreitung. Heimat ist Ostindien; durch Kultur ist die Pflanze in allen tropischen und subtropischen Gebieten der Erde verbreitet und wird für gärtnerische Zwecke auch in der Gemäßigten Zone verwendet. In Ostafrika wird sie u. a. in Uganda, Ungoro, Nyasaland, BritOAfrika (Mombasa) angebaut.

In DOAfrika kultiviert und stellenweise verwildert. O-Usambara: bei Amani 900 m * III cult. (P 9736).

var. esculenta (L.) Schott Syn. (1856) 41 = *Arum esculentum* L. Spec. pl. ed. 1 (1753) 965; Rumph Herb. amb. 5 (1747) tab. 110 fig. 1 = *Colocasia esculenta* Schott Melet. 1 (1832) 18. — Anhang des Spadix nur halb so lang wie der ♂ Teil der Inflorescenz.

Verbreitung. Sandwich-Inseln: Oahu, und wegen der eßbaren Knollen kultiviert.

DOAfrika, Süd-Pare-Gebirge: Suji → Taë 1400—1300 m qu. sp., * gelb III (P 9610). — Uha: bei Muhorro 1350—1450 m, ⁻ II !!; Kassulo → Tare 1315—1640 m cult. ⁻ III, Z^3 (P 38601); kwa Bikare → Mkigo 1590—1615 m cult. III !!. — Urundi: bei Niakassu 1900 m cult., ⁻ III !!.

4. **Arisaema** Mart.

A. Mildbraedii Engl. in Wiss. Ergebn. D. Zentr. Afr. Exped. 1907/8 2 (1910—1914) 55; Engl. in Pflanzenreich IV 23 F (1920) 173 fig. 35. — Blätter fußförmig 7—9-teilig, mit den Blüten gleichzeitig.

DOAfrika, Kiwu: Sabinjo-Mgahinga-Sattel, Bambuswald 2500 m * XI ganz vereinzelt (Mildbraed 1746 !); Insel Kwidjwi im Kiwu-See 1700 m * IX (Mildbraed 1216 !).

5. **Sauromatum** Schott.

S. nubicum Schott Syn. Arac. 1 (1856) 25 = *S. abyssinicum* Engl. Monogr. Phan. 2 (1879) 569. — 1 Blatt, fußförmig 7-teilig, mit oder nach der Blüte.

Verbreitung: Kamerun. Ubangi. CSudan. Abyssinien. ObSennaar. Eritrea. SNyasaland.

DOAfrika, Kilimandscharo: Marangu in Bananenfeldern 1400 m (Volkens 2266).

6. **Amorphophallus** Blume.

Spadix kürzer oder etwa = Spatha, sein Appendix ± zylindrisch.
Narbe tief 2—3-lappig. Spatha innen unten längsgerippt. 1. **A. Schweinfurthii.**
— nicht —, scheibenförmig.
Spatha etwa so lang wie der Spadix, innen glatt. Spadix 9—14 cm, davon der Appendix 5—9 cm. 2. **A. mossambicensis.**
— 1/4 länger als der Spadix, dieser 9 cm lang. Blattabschnitte sehr verschieden gestaltet und ungleich groß. Spatha innen mit feinen Längsrippen. 3. **A. anisolobus** n. spec. — S. 214.
— 2-mal so lang als der Spadix, dieser nur 3—4 cm lang. Blätter nicht bekannt. 4. **A. Unyikae.**
Spadix ± länger als die Spatha, sein Appendix ± kegelförmig.
Narbe tief 2—3-lappig.
Griffel 1 mm lang. Spatha 50 cm lang, auf der Innenseite unten mit haarförmigen Fibrillen ausgekleidet. Blattabschnitte sehr ungleich groß, länglich, 8—9 und 15—20 cm lang. 5. **A. Stuhlmannii.**
— fehlt. Spatha (vollkommen abgeblüht)? viel kürzer, innen unten mit kleinen flachen Warzen bestreut. Blattabschnitte fast gleichartig, lineal bis lanzettlich, 4—4.5 × 0.3—0.8 cm. 6. **A. linearilobus** n. spec. — S. 215.
Narbe nicht gelappt.
Griffel ± = Fruchtknoten. Appendix ± > Spatha, dünn.
♂ Blütenstand lockerblütig. 7. **A. sparsiflorus.**
— — gedrängt.
♂ Blütenstand zylindrisch, ein wenig dünner als der ♀. 8. **A. Gregoryanus.**
— — umgekehrt kegelförmig, gegen die Spitze dicker als der ♀. 9. **A. Kaessneri.**
— viel kürzer als der Fruchtknoten. Appendix unten breit eiförmig, oben dünn, bis 50 cm lang. 10. **A. maximus.**

Griffel fehlt.

Narbe lang kegelförmig. Appendix 15—18 cm lang. Spatha innen unten mit kurzen Fibrillen dicht besetzt.

11. A. Goetzei.

— halbkuglig. Appendix ca. 27 cm lang. Spatha innen unten mit ∞ netzig verbundenen Längsrippen.

12. A. Fischeri.

— flach scheibenförmig. Appendix bis 1 m lang. Spatha innen unten mit kurzen Fibrillen dicht besetzt.

13. **A. anguineus** n. spec. — S. 215, Fig. 1, 2.

Amorphophallus Blume.

1. **A. Schweinfurthii** NEBrown in Th. Dyer Fl. trop. Afr. 8 (1901) 149; Engl. Pflanzenreich IV, 23 C (1911) 69 fig. 25 = *Hydrosme Schweinfurthii* Engl. in DC. Mon. Phan. 2 (1879) 322.

Ghasal. Abessinien. Kamerun. Niamniam. OAfrika: Karatschongo.

Deutsch-Ostafrika, Ugogo: Pori und Flußufer bei Bahi → den Bubu-Fluß 850 m * ⁰ XII (P 33244[1]); bei Bahi westlich km 521, 850 m ⁺ ⁰ jung XII (P 33367). — GrGraben: altes Kulturgelände südlich Saranda zwischen Eisenbahnstation und Dorf 1095 m nur Blätter $V^1 Z^1$ (P 33442); westlicher Grabenrand bei Saranda in felsigem Walde 1095—1200 m ⁰ und Blatt XII (P 33593).

---

1) Über die bisher in DOAfrika noch nicht bekannt gewesene Pflanze habe ich an Ort und Stelle am 16. Dezember 1925 (P 33244) folgende Beobachtungen notiert: Rhizom eine von oben nach unten abgeflachte hellbräunliche Knolle, die bleistiftdicke Ausläufer treibt, um Brut zu bilden. Knolle 10 cm breit, 4 cm hoch, am oberen Rande unter dem Schaft mit einem Kranz von horizontalen bindfadendicken weißen Wurzeln. Der Blattsproß ist am Grunde von 3 zusammengerollten grünlichweißen, schwarzpurpurn punktierten Niederblättern umgeben. Junge Blätter, 2—3 am Stengel, schon entfaltet oder eben hervortretend. Kein Knie an Schaft oder Blattstiel.

Exemplar 1. Inflorescenz 17 cm lang, davon der Spadix-Anhang 6 cm; der ♂ Teil ist 2.5 cm, der ♀ Teil 9 cm lang, wenn schon Frucht angesetzt ist; zwischen ♂ und ♀ befindet sich keine Lücke.

Exemplar 2. Inflorescenz jung, eben aufgeblüht 15 cm lang, davon der Spadix-Anhang 7.5 cm, der ♂ Teil 3.5 cm, der ♀ Teil 2.5 cm lang. Spatha 18 cm lang, unten annähernd zylindrisch, dieser Teil 6 cm lang, 3 cm dick; oberer Teil dütenförmig geöffnet, faltig daher am Rande sehr kraus, dünn, alles purpurschwarz wie der Spadix, der kegelförmig ist, unten flach gefeldert und bis zur Spitze feinkörnig-warzig. Unterer Teil der Spatha außen trüb grün, fein längsfurchig und mit ∞ hellen Punkten gezeichnet, innerseits tief purpurschwarz, fein netzig-längsaderig. ♂ Blüten undeutlich gruppiert, dichtstehend, hellbräunlich. ♀ Blüten ohne Perianth, hellgrün; Narben sitzend, kappenförmig, schwarzpurpurn.

2. **A. mossambicensis** Klotzsch ex Garcke in Peters Mossamb. Bot. 2 (1862) 509 tab. 56 = *Hydrosme mossambicensis* Schott in Österr. Bot. Wochenblatt (1857) 389; Gen. Ar. (1858) 33.

Verbreitung: Untere Sambesi. NNyasaland.

Deutsch-Ostafrika, Konde: Kyimbila, Kipula Land 1000 * XII (Stolz 2305 !).

3. **A. anisolobus** APeter n. spec. — S. 214.

Deutsch-Ostafrika, Unyamwesi: Kombe östlich → Kaliuwa bei km 986, 1100 m, ⁻ I, $V^1 Z^2$ (P 35690). — Uvinsa: Felshügel südwestlich bei Malagarassi 1060—1100 m, ⁻ I (P 35816).

4. **A. Unyikae** Engl. et Gehrm. in Pflanzenreich IV 23 C (1911) 72.

DOAfrika, Nyasaland, Unyika: Dorf Toola 1300 * XI (Goetze 1413 !).

5. **A. Stuhlmannii** Engl. et Gehrm. in Pflanzenreich IV 23 C (1911) 81 fig. 28 = *Hydrosme Stuhlmannii* Engl. in Bot. Jahrb. 34 (1904) 152.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: Daressalam, im Kriek → Konduchi hin ⁻ IV, $V^1 Z^2$ (P 39338). — Handeï: Muhesa → Longusa im Uferwald des Sigi 100—170 m IX (Engler 400 !); Wald bei Kwamtilli 300 m X Blatt 1.3 m hoch (P 25192). — Ost-Usambara: Urwald bei Amani 700 m * III (Warnecke in Herbar. Amani 333 !); Kwamkujofälle bei Amani * IV (Braun in Herbar. Amani 1672 !) !!; Sigital unter Amani 800—500 m * V (P 3583, 3809); Amani → Derema 800—900 m, V, $V^2 Z^1$ (P 3673, 16936 [1])). — WUsambara: am Pangani-Fl. bei Korogwe 250 m ⁻ V (P 3873[b]); Balangai → Fingo, Urwaldparzelle 450 m, ⁻ III !!. — Useguha: Hale, von der Panganibrücke zu den Kleinen Panganifällen 330—300 m, ⁻ V, $V^2 Z^1$ (P 40270). — Ngulu: Goweko östlich km 786—776.5, 1200 m, ⁻ I (P 45916). — Uvinsa: Felshügel südwestlich bei Malagarassi 1060—1100 m, ⁻ I (P 35862).

6. **A. linearilobus** APeter n. spec. — Spadix kurzspitzig. S. 215.

Deutsch-Ostafrika, Turu: Itigi östlich gegen Bangayega hin auf altem Ackerlande bei km 619.8—620.3, 1300—1250 m, ⁰ I, $V^2 Z^1$ (P 33853). — Uyansi: Tschaya westlich → Tura im Buschpori 1250—1230 m, ⁻ I (P 34258). — Unyamwesi: Kombe westlich → Usinge bei km 1003.6, 1100 m, ⁺ I, $V^2 Z^1$ (P 35575).

1) Bemerkung zu P 16936. Die Knolle war etwa 16 cm dick, von oben nach unten abgeflacht, außen knollig-wulstig auf der Oberfläche, hellbräunlich gefärbt. Unter Herbarnummer 16936 ist das ganze Blatt, in Stücke zerlegt, getrocknet worden; sein Blattstiel war 1.5 m hoch, jeder der 3 Abschnitte 1 m lang, zusammen 2.5 m.

7. **A. sparsiflorus** ENGL. et GEHRM. in Pflanzenreich IV 23 C (1911) 89 fig. 32 = *Hydrosme sparsiflora* ENGL. in EJahrb. 15 (1892) 462 tab. 14 fig. J, Q.

Masai-Hochland in BritOAfrika: Kitui in Ukamba * VI (HILDEBRANDT s. n. !).

Diese Art, wie die drei folgenden, könnten meines Dafürhaltens noch in Deutsch-Ostafrika aufgefunden werden, daher sind sie hier mit erwähnt.



Fig. 1. Amorphophallus anguineus n. spec. in voller Blüte. Ugogo: bei Kimamba 24. XI. 1925.

8. **A. Gregoryanus** ENGL. et GEHRM. in Pflanzenreich IV 23 C (1911) 90 = *Hydrosme Gregoryana* ENGL. in EJahrb. 36 (1905) 237.

BritOstafrika, Masai-Hochland: Kikumbuliu, Intoto wa Ande * IV (GREGORY s. n. !); Kibwezi * IV (SCHEFFLER 159 !).

9. **A. Kaessneri** ENGL. et GEHRM. in Pflanzenreich IV 23 C (1911) 90.

BritOAfrika, Masai-Hochland: Simba * IV (KÄSSNER 638 !).

10. **A. maximus** NEBROWN in Th. Dyer Fl. trop. Afr. 8 (1901) 157 = *Hydrosme maxima* ENGL. in DC. Mon. Phan. 2 (1879) 323; ENGL. in Pflanzenreich IV 23 C (1911) 91 fig. 33.

BritOAfrika: Mombasa * V (Hildebrandt 2018 !).

Deutsch-Ostafrika, Ussagara: Kilossa, bei km 286.5 im Mukondokwa-Tal 530 m * XI (P 32615[b]).

11. **A. Goetzei** NEBrown in Fl. trop. Afr. 8 (1901) 150 = *Hydrosme Goetzei* Engl. in EJahrb. 28 (1901) 355.

Deutsch-Ostafrika, NNyasaland: zwischen Khutu und Uhehe am Osthang der Vidunda-Berge in der Flußniederung auf schwarzem Boden, bis 500 m * XII (Goetze 407 !).



Fig. 2. Amorphophallus anguineus n. spec. im Abblühen: das Anhängsel des Spadix schon welk. Ugogo: bei Kimamba 24. XI. 1925.

12. **A. Fischeri** NEBrown in Fl. trop. Afr. 8 (1901) 158 = *Hydrosme Fischeri* Engl. in EJahrb. 15 (1893) 460.

Vorkommen: in Tälern bei Boruma am Sambesi.

Deutsch-Ostafrika, Ussukuma: südlich vom Victoria-See an der Wasserscheide des Simiu * (Fischer 618 !).

13. **A. anguineus** APeter n. spec. — Sehr ausgezeichnet durch den bis 1 m langen Appendix des Spadix. — S 215, Fig. 1 und 2.

Deutsch-Ostafrika, Ugogo: bei Kimamba 450 m ohne Blätter * XI (P 32458). — Ussagara: Kilossa, im Mukondokwa-Tal bei km 286.5, 530 m, * XI (P 32615).

7. **Typhonodorum** SCHOTT.

Die Gattung ist in Ostafrika nur auf den Inseln durch die einzige Art vertreten, die ich auf der Insel Sansibar zu Gesicht bekam. Sie wächst in großer Menge in den Bachsümpfen des Mwera-Flusses bei der Brücke, im Wasser stehend.

T. Lindleyanum SCHOTT in Oest. bot. Wochenbl. 7 (1857) 70 = *T. madagascariense* Engl. in EJahrb. 1 (1881) 188 = *Arodendron Engleri* WERTH in Mitt. Sem. orient. Sprach. (1901) Abt. III, 54. Verbreitung: Madagascar! Comoren (eingeführt)! Mauritius! Insel Sansibar: im Mwera-Fluß (STUHLMANN 1124 = *mgomba y madja barida*!, UHLIG s. n.!, WERTH s. n.!); daselbst * IV hellgelb, ^{0} bis vollreif, $V^1 Z^4$ (P 39448).

8. **Anchomanes** SCHOTT.

Blütenschaft (= „Ständer") und Blattstiel stachlig. Fruchtknoten in den dick kegelförmigen etwas herabgekrümmten Griffel verschmälert.

Ständer 45—90, Spatha 12.5—30, ♀ Teil des Blütenstandes 2—4 cm, ♂ 4 mal so lang. 1. **A. difformis.**

— fast 30, Spatha 8, ♀ Inflorescenz 2, ♂ 0.5 cm lang. Blatt unbekannt. 2. **A. abbreviatus.**

— ohne Stacheln, 20—25 cm hoch. Spatha 2.5—3 cm, Blütenstand 2.0—2.7 cm, davon ♀ 7 mm, ♂ 1.4—2 cm lang. 3. **A. Boehmii.**

1. **A. difformis** Engl. in DC. Monogr. Phan. 2 (1879) 304 = *A. Hookeri* SCHOTT in Oesterr. bot. Wochenbl. (1853) 314; Hook. Bot. Mag. (1863) tab. 5394 = *A. dubius* SCHOTT Prodr. (1860) 135.

Mit Knolle. Blatt bis 2 m hoch, die Bestachelung der Stiele wechselt sehr. Fruchtkolben bis 20 cm lang, 7—8 cm dick; Früchte rot.

Verbreitung: Liberia! Sierra Leone! Togo! Kamerun! Fernando Poo. Span. Guinea! Angola!

Deutsch Ostafrika, Lindi: Muera Plateau, Mpunga ^{0} V (BUSSE 2626!). — Usaramo: Berg Ntima mbeho oberhalb Pugu $^-$ X (P 31495, Rhizom abgeflacht, 6 cm breit; Blattstiel stachlig, graubraun, hellgescheckt). — Udigo: Ukereni-Hügel bei Amboni 80 m ^{0} VI, Z^3 (P 24122, 24143). — Mlinga-Gebirge: Longusa → Magrotto 300—500 m, $^-$ III, V, $V^2 Z^{1-2}$, 1.2 m hoch!! — Handeï: Schluchtenwald Maramba → Kichangani 300 m, junge Frucht XII (P 22470, 2 m hoch, Fruchtstand 16 cm lang; Ständer und Blattstiel mit viel oder wenig Stacheln); Urwald Maramba → Marimba 280 m, $^-$ VI!!; Urwald Maramba → Mhinduro 280 m, $^-$ XII (P 22115);

Maramba → Bwiti im Walde Mocha 250 m, $^{-}$VI (P 21 145); Wald Kwamtili → Maneno Mbangu 280 m $^{-}$X !!; Wald bei Kwamtili 300 m, $^{-}$X mit endophytischer Alge (P 25 191); Pflanzung Kwatumbili 280 m $^{-}$X !!; Maramba → Longusa 280 m, $^{-}$VI !!; Urwald Longusa → Sigi 430 m, $^{-}$V, Z^3 (P 10 200); Uferwald des Sigi unterhalb Longusa 250 m, $^{-}$III (P 19 968); Longusa → Bumbuli 400, $^{-}$XI (P 21 958, 1.5 m hoch); Abhänge bei Longusa 300 m, $^{-}$III, $^{-}$V (P 40 069, 1 m hoch); Sigi → Pandeni 400 m, ^{0}V !! Blatt mannshoch, Frucht-Kolben 20 cm lang, 7—8 cm dick). — Ost-Usambara: Steilhang Derema → Longusa 800 m, ^{0}V !!; Sigi → Bumbuli 400 m, $^{-}$III !!; Sigital unter Amani 600 m, ^{0}V, $V^2 Z^2$ (P 3 808, 10 075); Waldschlucht bei Magunga (bei Kazita) 450 m, $^{-}$VIII !!; Magunga → Odongo Ekundu 350 m VIII !!; Mashewa → Korogwe im Walde bei Makumba 300—325 m, $^{-}$VIII, Z^3 (P 12 592); Urwald am Berg Lutindi bei Herthahöhe 780 m, VIII !!; Wald am Kilemele See, Kijango → Mashewa 400 m, VIII !!; Tarchonanthus-Wald bei Mashewa 450 m, IV !!; am Bombo-Berg bei Magunga (bei Korogwe) im Bachbett 500 m, $^{-}$XII !!; Waldrest am Bombo-Berg 400 m, $^{+}$XII, $V^1 Z^1$ (P 18 616); Abhang → das Luengeratal 800 m, $^{-}$IX (Engler 888 !); Mnyussi → Kwamkoro, am Gonya-Berge 800 m, IV (P 3 134). — West-Usambara: Mashewa 500 m $^{-}$VII (Holst 3 577 !); Oberes Boshatal bei Mashewa 500 m IV, VIII !!; Gegend Nembuibui bei Mashewa, Wald 450 m, IX !!; Gegend Ngulumi bei Mashewa 500—600 m Z^3 und am Sattel 840 m ^{0}rot IX !!; Kwai, Rusotto-Tal 1 200 m, * III (Eick !); Mashewa → Kijango im Tarchonanthus-Walde 400—450 m, IV !!; Mashewa, Mshihui-Berge Nordabhang gegen die Umbasteppe = Landschaft Mbula 1 000—375 m, VIII !!; Mgila → Fingo am Fluß Kwole = Bululu 320 m, $^{-}$III !!

2. **A. abbreviatus** Engl. in EJahrb. 36 (1905) 237.

Brit. Ostafrika: Umba * II (Kässner 92 in Herbar. Brit. Mus., nur Abbildungen gesehen !).

3. **A. Boehmii** Engl. in EJahrb. 15 (1893) 454 tab. 14 fig. A—H.

Uganda: Gonda * X (Böhm 282 ! = tentela).

9. Richardia Kunth.

R. hastata Hook. f. in Bot. Mag. (1860) tab. 5176 = *Zantedeschia hastata* Engl. in EJahrb. 4 (1883) 64 = *Richardia Lutwychei* NEBr. in Gardn. Chron. 1893 XIII 568 = *Zantedeschia Lutwychei* Dur. et Schinz Consp. Fl. Afr. 5 (1894) 477 = *Z. oculata* (Lindl.)

Engl. Pflanzenreich. IV 23 D (1915) 68 No. 7. — Mit Rhizom, Wurzeln verdickt.

Verbreitung: Transvaal! Natal! Basutoland! ? Nyasa See.

Deutsch Ostafrika, Udigo: Wald auf der Höhe bei Kiomoni $^{-}$ IV, $V^1 Z^1$ (P 39 601). — Handeï: Urwald Maramba → Muhinduro 280 m, $^{-}$ XII (P 22 112^b); Maramba → Bamba 300 m, $^{-}$ IX !!; Kautschukpflanzung ManenoMbangu → Kwatumbili 300 m, $^{-}$ X !!. — West-Usambara, Buiko → Manka-See 400 m, $^{-}$ VI (P 41 047); Urwald Mashewa → das obere Bosha-Tal 450 m $^{-}$ IX (P 13 793^b).

10. **Culcasia** Beauv.

Spadix länger als die Spatha, diese grüngelb. 1. **C. scandens.**
— kürzer — — —, diese orange. 2. **C. falcifolia.**

1. **C. scandens** Beauv. Fl. Oware 1 (1804) 4 tab. 3. — Wurzelkletterer an Bäumen und Felsen. Früchte ziegelrot.

Verbreitung: Ober Guinea. Liberia! Sierra Leone! Lagos! Niger. Togo (Busse 3488!). Ubangi! Kamerun (Busse 3209!). Spanisch Guinea! Gabun! S. Thomé! Ghasal! Kongo! Angola! Brit. Ostafrika. Uganda. Entebbe!

Deutsch Ostafrika; Lindi: Matumbi-Berge, Lihomanga-Tal, Tshumo im Uferwald 230 m, * VIII (Busse 3087!). — Usaramo: Hügelland östlich Mtondwe 500 m, * VII (Stuhlmann 8264! = mvumo [kisaramo]). — Tanga: Schluchtenwald bei Kigombe * IV, Z^3 (P 39 671). — Mlinga-Gebirge: Magrotto → Longusa 735—600 m, $^{-}$ V, $V^1 Z^3$!!; Magrotto → Magila 725—690 m, ^{0} rot II !! — Handeï: Muhesa → Longusa, Uferwald 100—170 m, * IX (Engler 371!, 398!); Urwald Pandeni → Longusa 400 m, * V, $V^5 Z^5$ (P 10 184); Longusa → Sigi Fluß 1.5 km unterhalb Longusa 250 m, * V, $V^3 Z^3$ (P 40 030); Bumbuli → Longusa 380 m, * XI, $V^1 Z^1$ (P 21 963). — Ost-Usambara: Maurui am Pangani-Fluß 400 m, * VII (Volkens 2 395!); Amani (Busse 2 197!, 2 228!, 2 254!); Urwald von Amani 915—1160 m, ^{0} IX (Engler 539!, 567!); beim Dorf unterhalb Amani 900 m, ^{0} XI (P 22 062^b); Amani → Berg Bomole 900—1 050 m, IV (P 3 324, 3 566^d); Urwald Amani → Monga 900—925 m, * I (P 139^c), daselbst ^{0} VII (P 17234); Amani → Kwamkoro ^{0} IV (Busse 2 228!); Urwald Kwamkoro → Sangerawe 975—950 m, * XI, Z^4 (P 18 228); Urwald bei Kwamkoro * IV (Busse 2 254!); Derema → Ngambo 850—900 m, ^{0} ziegelrot IX, Z^5 (P 13 962); bei Nguelo 950 m, ^{0} XI (Frau Kummer 27!); Urwald Ngambo → Kwamkuyo 950

IV!!; Magunga bei Kazita 800 m, V!! — West-Usambara: Kijango → Magoma * VIII (Braun in Herbar. Amani 2706!); Bungu → Ngaraya, Urwald 1040—1100 m, III!!; Ngaraya → Balangai, großartiger Schluchten-Urwald 1100—1300 m, III!! = kiandama; Urwald Balangai → Bumbuli 1150—1300 m, III!!; Mbalu → Mlalo 1800 m, XII (Uhlig 854!). — N Pare-Gebirge: Urwald Kilomeni → Kissangara 1640 m, ⁰ VI, Z³ (P 11592); Shigatini, Waldschlucht am Berge kwa Muala 1680 m * XI, Z³ (P 14333). — Useguha: Pangani * ⁰ XII (Stuhlmann 31!); Korogwe → Mnyussi am Pangani-Ufer bei km 82/83, V¹Z³ (P 40629); Inseln des Pangani-Flusses bei Hale 180 m, VI (P 4485ᵇ); Dorfinsel Hale im Pangani 180 m * VIII (P 24389); Insel kwa Kilanga des Pangani Fl. ⁰ V (P 40340); an einem Bachlauf bei den Kleinen Pangani-Fällen 180 m, VI (P 4465). — Süd-Nguru: Liwuale-Fluß bei Maujangu 750 m, * V (Holtz 2910!). — Karagwe: Bukoba ⁰ XI (Stuhlmann 1118!). — Konde: Kyimbila, Malila 1800 m, * IV (Stolz 2644!).

form. lancifolia Engl. in Pflanzenreich IV 23 B (1905) 303.

Deutsch Ostafrika, Ost-Usambara: Urwald bei Amani * IX (Engler 572!; IV Busse 2197!); Derema 880 III (Heinsen 35!); Nguelo 1000 m, *⁰ III (Scheffler 15!). — West-Usambara: Gonja, Bulua-Wald 1030 m, IX (Holst 4250!).

2. **C. falcifolia** Engl. in EJahrb. 26 (1899) 418.

DOstafrika, Uluguru: Bergurwald Ng'hweme 1600 * X (Stuhlmann 8817, Unicum!).

11. Stylochiton Leprieur.

♀ Blüten 7—10, spiralig gedrängt; Früchte ährig oder kopfig.

Blätter breit spießförmig, unterseits mit dichtstehenden schwarzen Punkten; Nerven oft dunkelfarbig. 1. **St. salamicus.**

— nicht schwarz punktiert, Nerven mit dem Blatt gleichfarbig oder heller.

Blätter derb, ± lederig; Spreite verschieden gestaltet, am Grunde gestutzt oder ± herzförmig, oft ohne deutliche Basallappen.

Blattspreite groß (bis 48 × 40 cm), eiförmig bis ± kreisrund, stumpf zugespitzt, am Grunde ± herzförmig mit (oft undeutlichen) großen stumpfen Basallappen; jederseits zwischen den 3—4 derben Seitennerven I. Ordnung (nicht immer) mehr oder minder unregelmäßig zerschlitzt bis geteilt. · Rhizom senkrecht, fingerdick, 12 cm hoch.

2. **St. fissus n. spec.** — S. 202, 216; Fig. 3.

— ansehnlich (bis 22 × 18 cm), herz-pfeilförmig, sehr spitz,

mit großen gerundeten Basallappen; jederseits mit ca. 7—10 basalen und 5—6 vom Mittelnerv unter sehr kleinem Winkel abgehenden Seitennerven I., alle diese Seitennerven fein, unter einander gleichartig. (Die Blätter jüngerer Exemplare sind ± eilänglich, am Grunde gerundet oder gestutzt). Rhizom senkrecht, 3 cm hoch. Blattstiel und Blattrücken haarlos.

3. **St. tenuinervis** n. spec.

var. pubescens n. var. Blattstiel und Mittelnerv unterseits kurzhaarig.

Blätter krautig, ± tief herz- oder pfeilförmig, mit sehr verschieden großen und breiten Basallappen.

Blattrücken, Blattstiele und Ständer kurzhaarig.

4. **St. puberulus.**

— — — — kahl.

Wurzelhals ± von alten Blattfasern umkleidet.

Blattspreite herzförmig oder dreieckig-pfeilförmig, als ganzes $1^1/_2$—$2^1/_2$ mal so lang als breit.

Faserschopf des Wurzelhalses stark ausgebildet. Blattspreite dreieckig-pfeilförmig, Bucht weit offen, Basallappen horizontal hinausgezogen, ± spitz.

5. **St. Hennigii.**

— — — schwach ausgebildet. Blattspreite herzförmig, Bucht gerundet, Lappen gerundet-stumpf.

6. **St. natalensis.**

— verschieden gestaltet, im allgemeinen schmal-länglich, als ganzes (3.5—)5—10 mal so lang als breit. Fasern am Wurzelhalse wenig ausgebildet.

7. **St. heterophyllus** n. spec.

form. subcordatus APeter. Blattspreite lang-länglich bis umgekehrt-lanzettlich, mit kaum 5 mm langen gerundeten abwärts gewendeten Basallappen.

form. lobulatus APeter. Blattspreite lineallanzettlich, vom oberen $^1/_3$ ab gegen die Spitze hin verschmälert, am Grunde herz-pfeilförmig mit kleinen etwas abgesetzten ± auswärts gewendeten gerundeten Basallappen.

form. sagittatus APeter. Blattspreite schmal pfeilförmig, Mittellappen vom Grunde bis zur Spitze gleichmäßig verschmälert, Basallappen kurz drei-

eckig, abwärts oder kaum auswärts gebogen, 3—3.5 cm lang.

form. hastatus APeter. Blattspreite schmal spieß-pfeilförmig, Mittellappen vom Grunde ab aufwärts allmählich verschmälert. Basallappen verlängert (ca. 5 cm) breit lineal, ± auswärts gekrümmt.

Wurzelhals ohne alte Blattfasern, von dünnen häutigen Niederblättern umgeben, die zuweilen einige dünne Fasern hinterlassen.

Spatha ca. 4 cm lang, die unteren 1.5 cm aufgeblasen und den Fruchtkopf umhüllend, darüber sehr viel enger und zylindrisch, am Ende umgebogen und die Mündung kapuzenförmig überwölbend. Blattspreite tief pfeilförmig, bis 23 cm lang, Basallappen 10 cm lang. 8. **St. cuculliferus** n. spec.

Spatha viel länger und nicht kapuzenförmig.

Spatha ca. 10 cm lang, die 5 cm lange Röhre unten aufgeblasen, oben ein wenig schmaler und zylindrisch, der freie Teil lanzettlich. Basallappen der Blattspreite mit breiter stumpfer Bucht zwischen sich. Spreite 10—30 × 12.5—38 cm.

9. **St. maximus.**

— nicht bekannt. Basallappen der Blattspreite mit oft schmaler spitzer Bucht zwischen sich, sodaß sie sogar zuweilen übereinandergreifen. Blattspreite 17—30 × 13—15 cm.

10. **S. cordifolius.**

Von unsicherer Stellung: Blattspreite länglich, bis 15 × 6 cm, mit fast parallelen Rändern, oben etwas zugespitzt und mucronat, am Grunde schwach herzförmig mit gerundeten kaum vortretenden Basallappen. Basalnerven 2—3, Seitennerven der Mittelrippe mehrere, unter etwa 30° abzweigend, alle fein, gleich.

11. **St. obliquinervis** n. spec.

♀ Blüten wenige, in 2 übereinander grundständigen Reihen gedrängt. Blätter krautig, ± schmal pfeilförmig, mit langen linealen Basallappen.

Blattspreite länglich oder fast riemenförmig, 10—15 × 2.5—3.7 cm, unten verbreitert, oben stumpf und kurz bespitzt; Basallappen schmal-länglich, 5—11 × 1.3—2.7 cm. Spatha mit ca.

3 cm langer Röhre, länglichlanzettlich, mit ca. 6.2 cm langem freien oberen Teil. Blattstiel bis etwa zur Hälfte scheidig. 12. **St. lobatus.**

Blattspreite lineal, 13—17 × 0.7—1.0 cm, unten verbreitert, oben spitzzugespitzt und mit 3—4 mm langer Stachelspitze; Basallappen ± (zuweilen scharf-)abgesetzt, lineal, bis 5.5 × 0.3—0.4 cm. Spatha mit ca. 16 cm langer lineal-zylindrischer Röhre, 2—2.5 cm langem freien oberen Teil. Blattstiele auf 1/3—1/2 ihrer Länge scheidig. 13. **St. angustifolius** n. spec.

form. lanceolatus APeter. Blattspreite mit lanzettlichem 16 × 2.5 cm Mittellappen, sonst wie die Hauptform.

♀ Blüten wenige, in nur 1 grundständigen Reihe. Spatha mit einer bis 11.5 cm langen Röhre, nicht unterirdisch, auf 4—6 cm langem Ständer. Blätter nicht bekannt.

14. **St. tubulosus** n. spec.

Stylochiton Leprieur.

1. **St. salamicus** NEBrown in Flor. trop. Afr. 8 (1901) 189.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: Daressalam (Kirk s. n., nur Abbildung!); Bagamoyo (Hildebrandt 1280!); in einem Tal der Pugu-Berge unweit Pugu ⁰ X (P 31421). — Handeï: Maramba → Longusa 280—300 m, VI (P 21265, sehr große Exemplare); Maramba → Kichangani 280—300 m, * ⁰ XII (P 22133); Maramba → Maneno-Mbangu 280—300 m, * XII (P 22161). — Ost-Usambara; Waldschlucht Ngambo → Magunga 500—400 m, VIII (P 12520); Mashewa → Korogwe beim Dorf Makumba, Wald 325 m, VIII (P 12573). — West-Usambara: Wald am Mbala-Berg bei Makuyuni 500 m, II, $V^1 Z^{1-2}$ (P 15420); Gegend Tunya bei Mashewa 400 m, IX (P 13572); daselbst Gegend Kwatangu 400 m, IX (P 13868); Gegend Ngulumi bei Mashewa, Schlucht mit kleiner Wasserstelle 600 m, IX (P 13730); Umbasteppe → Mashewa, Bergabhang der Mshihui-Berge 375—500 m, VIII, (P 13532); Mashewa → Umbasteppe, Gegend Kikumbi 500 m, ⁰ VIII (P 13312).

2. **St. fissus** APeter n. spec. — Pflanze 80 cm hoch; Blätter ± geschlitzt. S. 216, Fig. 3.

Deutsch-Ostafrika, Uvinsa: östlich von Malagarassi im Grase 1060 m, ⁻ I, $V^1 Z^2$ (P 35964); Grassteppe bei km 1084/1087.5 westlich von Malagarassi 1060 m, ⁰ II (P 35981); in einem kleinen Sumpfgebiet 1 km westlich von Malagarassi 1060, ⁻ II !!

3. **St. tenuinervis** APeter n. spec. — S. 217.

Deutsch-Ostafrika, Uvinsa: Felshügel südwestlich bei

Malagarassi 1060—1100 m, ¯ I (P 35817); östlich von Uvinsa bei km 1133.6, 990 m, ^{0} ganz unten in der Erde II, $V^1 Z^1$ (P 36261); westlich von Uvinsa, blockiger Abhang bei km 1141, ¯ II, $V^2 Z^2$ (P 36367); bei Uvinsa westlich bis km 1171.5, 1060 m, ^{0} II, $V^1 Z^{2-3}$ (P 36440); nördlich von Lugufu → Kigambo mwagáo hin, Pori und Grassteppe über Eisen-Konkretionen 1070 m, ¯ II, $V^2 Z^1$ (P 36671). — Ujiji: östlich von Kigoma km 1250—1245.3, 800—850 m, ¯ II (P 46196); Kandaga → den See 950 m ¯ III, $V^1 Z^2$ (P 38969).

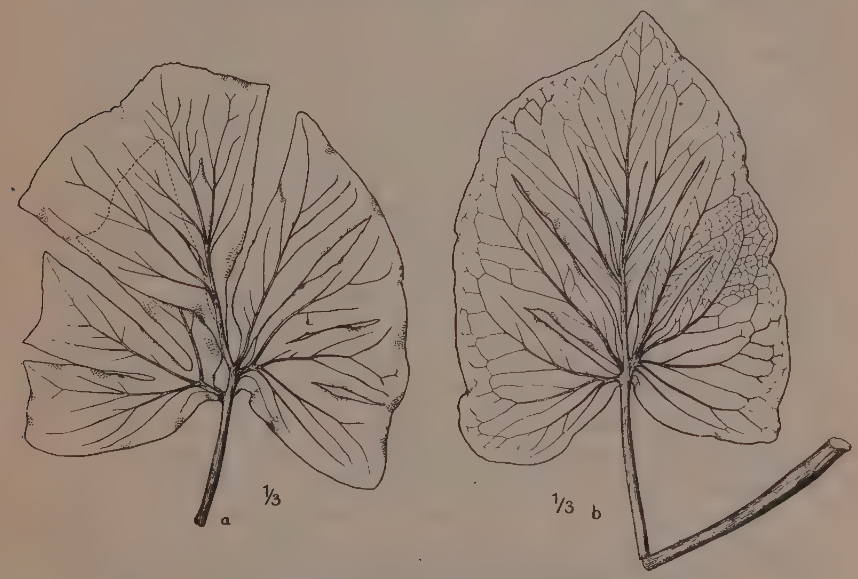


Fig. 3. Stylochiton fissus n. spec.
a Blatt vollkommen zerschlitzt, b unvollständig geschlitzt.

var. pubescens APeter. — Es liegt nur 1 Blatt vor, das beim Durchsehen des getrockneten Materials zwischen den kahlen Blättern gefunden wurde; es stammt von einem nach Göttingen geschickten lebenden Exemplar her, das jedoch leider zu Grunde gegangen ist. Deutsch-Ostafrika, Uvinsa: westlich von Uvinsa, blockiger Abhang bei km 1140.8, 990 m, mit der Hauptform II, $V^1 Z^1$ (P 36367[b]).

3. **St. puberulus** NEBrown in Fl. trop. Afr. 8 (1901) 188. — Wurzelfasern verdickt, schwammig. Geokarpisch.

Verbreitung: Am Boruma am Sambesi.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: bei Soga XII (P 14881). — Handeï: Mwele → Gombero 280—200 m VI (P 21079). — Useguha: Succulentenpori Dakawa → Kanga XII (P 14682); Hügel

am Flußlauf Mnigazi zwischen Saadani und Buyuni ^{0} XII, $V^1 Z^3$ (P 15092). — Ugogo: bei Kimamba 450 $^-$ XI (P 32459). — Ussagara: Pori am Fluß Romuma westlich Kidete 650 $^-$ XII (P 45611).

Zuweilen ist die Behaarung des Blattrückens sehr gering. Steriles Material ist ebenso wie bei St. salamicus, wo die Punktierung der Blattunterseite nicht immer reichlich erscheint, mit St. maximus zu vergleichen.

5. **St. Hennigii** Engl. in Pflanzenreich IV 23 E (1920) 32. — Wurzelhals faserig.

Deutsch-Ostafrika, Lindi: am Tendaguru * (Hennig 99!). — Usaramo: Succulentenpori bei Msua * Spatha grün XI (P 31724); bei Soga * XII (P 14882); beim Dorf Kanga 60 m *XII, Z^3 (P 14993); Soga → Baha, große Grasflächen im Walde, der öfters den Charakter eines Miombowaldes annimmt XII (P 14932). — Useguha: beim Dorf Kissauke * XII, Z^{2-3} (P 14695); Kwedihombo → Tuliani 450 m *XI, $V^1 Z^1$ (P 7230). — Khutu: Magogoni (Ruwu) 350 * IX (Brehmer 625!); Ebene östlich von Morogoro 560 m, $^-$ III, $V^2 Z^2$ (P 39017). — Süd-Rhodesia: Felshügel „Koppje“ nördlich von Umtali * IX Spatha grün $V^1 Z^1$ (P 30912). — Mossambik: Beira, bei Dondo im Urwalde $^-$ X, $V^2 Z^1$ (P 31190).

6. **St. natalensis** Schott Aroid. (1853) 10 tab. 14. — Wurzelhals ± mit Fasern bekleidet. Spatha weiß oder weißgrün.

Natal! Sofala-Gasa-Land: Delagoa-Bai!

Deutsch-Ostafrika, unsicher, möglicherweise noch festzustellen.

7. **St. heterophyllus** APeter n. spec. — Die Fasern der Blattreste am Wurzelhalse sind nicht immer reichlich vorhanden. Im allgemeinen erscheint die Blattspreite langgestreckt, so daß die Länge die Breite meist mehr als 5 mal übertrifft; die Basallappen wechseln in Länge, Breite, Gestalt und Richtung nicht wenig. Es lassen sich in dieser Hinsicht 4 Formen erkennen, während die Spatha nur geringe Differenzen zeigt. — S. 217.

form. subcordatus APeter.

Deutsch-Ostafrika, Uyansi: Tschaya westlich → Tura an Tümpeln 1250—1230 m, ^{0} jung I, $V^1 Z^1$ (P 34249). — Unyanyembe: Felshügel bei Tabora südöstlich → Kwihala 1200—1280 m, $^-$ I, $V^1 Z^1$ (P 35346).

form. lobulatus APeter.

Deutsch-Ostafrika, Ugogo: Kitalalo → Tschali am Rande der Surungai 850 m * grün XII, Z^{2-3} (P 33288). — Ngulu: Mi-

ombowald Malongwe östlich → Tura hin 1180—1170 m, ¯ I, $V^1 Z^1$ (P 34798).

form. sagittatus APeter.

Deutsch-Ostafrika, Ugogo: Abhänge und Tal am kleinen Felsberg bei Gulwe 850 m, * XII, $V^1 Z^2$ (P 32931).

form. hastatus APeter.

Deutsch-Ostafrika, Ussagara: Ausgang des Mukondokwa-Tales bei Kilossa 500 m, * XI, $V^2 Z^1$ (P 32597). — Ugogo: bei km 374 Gulwe → Msagali 760 m, * XII (P 32950); Pori und Flußufer Bahi → den Bubu-Fluß 850 m, ^{0} XII (P 33243).

8. **St. cuculliferus** APeter n. spec. — Während die freirandige Spitze der Spatha bei allen anderen mir zu Gesicht gekommenen Stilochiton-Arten als Fortsetzung der Röhre senkrecht steht, allenfalls zur Seite neigt, ist sie bei dieser neuen Spezies über die Mündung der Spatha kapuzenförmig abwärts übergebogen. Dadurch mutet die Inflorescenz etwas ungewöhnlich an.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: im Walde über Pugu X (P 31555). — Unyamwesi: Kombe westlich → Usinge hin bei km 1003.6, 1100 m, ^{0} I (P 35590).

9. **St. maximus** Engl. in EJahrb. 15 (1893) 466. — Geokarpisch. Wurzelfasern spindelförmig verdickt, schwammig. Blatt unterseits weißlich.

Verbreitung: Natal, Delagoabai!

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: Doda (Holst 2961!). — Useguha: Dorfinsel Hale im Pangani-Fluß 180 m, ¯ VIII (P 24378). — Udigo: Ukereni Hügel bei Amboni 80 m, ¯ VI, X (P 24174, 25603); Amboni → Panda in den Kreidefelsen ¯ IV, $V^1 Z^2$ (P 39492). — Handeï: Urwald Pandeni → Longusa 400—280 m, ^{0} V (P 10168); Longusa → den Sigi-Fluß 250 m, ¯ III (P 19930); Sigi-Uferwald unterhalb Longusa 250 m V (P 25348); Ngonja, Sigibrücke von Marimba → Maramba 250 m, ¯ VI (P 20434); Maramba → Mhinduro 280 m, ¯ IX !!; Maramba → Lugongo 280 m, ¯ VI (P 20991); Maramba → Kichangani, Schluchten-Urwald 280—320 m VI (P 20762); bei Kichangani 320—350 m, ¯ VI (P 20835); beim Dorf Mwesini 610 m, VI (P 20512). — Ost-Usambara: Kwamkoro → Mnyussi am Gonyaberg unweit der Sägemühle 500 m, ¯ I (P 332^b); Mnyussi an der Eisenbahn 280 m, I (P 335). — West-Usambara: Oberes Boshatal bei Mashewa 500 m, ^{0} hypogäisch VIII (P 13243).

10. **St. cordifolius** Engl. in Engl.Jahrb. 36 (1905) 240. — Wurzelfasern spindelig verdickt. — Brit. Ostafrika, im Kilimandscharo-Gebiet: Steppe zwischen den Bura-Bergen und Voi 400 m ¯ X (Engler 1959!).

Deutsch-Ostafrika, Handeï: Pandeni → Longusa, Urwald 400—280 m, ⁰ V, $V^1 Z^3$ (P 10133); Sigi-Uferwald unterhalb Longusa 250 m ⁻ V (P 20352); daselbst 1.5 km unterhalb Longusa 250 m ⁻ V, $V^2 Z^2$ (P 40022); Urwaldschlucht Maramba → Longusa in der Gegend Bamba 280—300 m, VI (P 21252); Mhinduro → ManenoMbangu 280—300 m, ⁻ VI (P 20928). — Ost-Usambara: Sägemühle Mnyussi → Kwamkoro 400 m ⁻ IV (P 3126).

11. **St. obliquinervis** APeter n. spec. — Rhizom ästig, Wurzelfasern sehr lang, wenig dick. Pflanze klein. Blätter aus schwach herzförmigem Grunde länglich. Seitennerven sämtlich gleichartig fein. — S. 219.

Deutsch-Ostafrika, Uvinsa: Grassteppe östlich von Malagarassi bei km 1083.4—1078.5, 1060 m, ⁻ II (P 36138).

12. **St. lobatus** NEBrown in Flora tr. Afr. 8 (1901) 190. — Rhizom mit knollig verdickten Wurzeln.

Deutsch-Ostafrika, ohne genauere Fundstelle (Steere s. n.!). — Udigo: Amboni → Gombero ⁻ IV, $V^1 Z^1$ (P 39543). — Handeï: Maramba → Marimba 280 m, VI (P 20555). — West-Usambara: Korogwe, längs des Pangani-Flusses im Grase 300 m, V (P 3882); Gegend Mpanga bei Mashewa (→ Tanga hin) im hohen Grase 450—500 m, IX (P 13629); Mashewa → Mission Emmau beim Dorf Mheza 500 m, IX (P 13842); Gegend Nembuibui bei Mashewa, Wald 450 m, IX (P 13702); Mshihui-Berge bei Mashewa → die Umbasteppe 450—1000 m, VIII!! — Unyamwesi: Kombe westlich → Usinge hin km 1003.8, im Wasser 1100 m, I (P 35606^b).

13. **St. angustifolius** APeter n. spec. — Blätter schmal pfeilförmig mit ± linealen Lappen. — S. 202, 219, Fig. 4.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: im Pori südwestlich von Msua XI (P 31772); Pori nordöstlich bei Msua * XI, $V^2 Z^{1-2}$ (P 31809); bei Kanga 85 m, XII, $V^1 Z^1$ (P 14994). — Useguha: Saadani → Buyuni, Grassteppe mit Blasenakazien XII (P 15068).

form. lanceolatus APeter.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: Msua im Succulentenpori * XI (P 31722).

14. **St. tubulosus** APeter n. spec. — Blätter noch nicht entwickelt. — S. 219.

Deutsch-Ostafrika, Mkata: Kleine Mkata-Steppe bei km 236.5, 450 m, * XI (P 45584).

12. Gonatopus Hook. f.

Blättchen lanzettlich bis elliptisch-lanzettlich, am Grunde nicht herablaufend. 1. **G. Boivini.**

Blättchen lineal oder lineallanzettlich, am Grunde weit herablaufend. 2. **G. angustus.**

1. **G. Boivini** Hook. f. in Bot. Mag. sub tab. 6026 = *Zamioculcas Boivini* Decne in Bull. Soc. bot. France 17 (1870) 321.

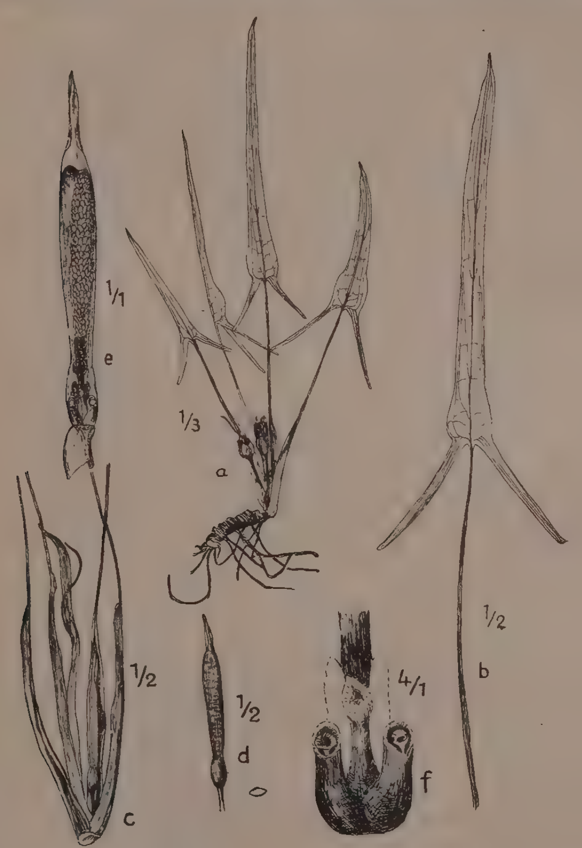


Fig. 4. Stylochiton angustifolius n. spec.
a ganze fruchttragende Pflanze $^1/_4$; b ein Blatt; c unterer Teil der Pflanze mit Blattscheiden und 1 Spatha; d eine Spatha von außen gesehen $^1/_8$; e Spatha geöffnet $^1/_4$; f die Fruchtknoten.

Ständer 1—2 m hoch, ohne Stacheln, oft 3—4 an einem Stock. Spatha weißlich bis bleigrau. Blattstiel geringelt-gefleckt oder ungefleckt, stachellos, mit einem Knoten; auch die Äste des Blattstieles haben Knoten, wenn auch kleinere als der Blattstiel selbst. Die Blattfiedern letzter Ordnung fallen ab und bilden, auf der

Erde liegend, in der gleichen Art und Weise an der Abgliederungsstelle Knöllchen und aus ihnen junge Pflanzen, wie es bei Zamioculcas bekannt ist. — Die Knolle ist giftig.

Verbreitung: Réunion. Shiri Hochland! Nyasaland. Somali! BritOAfrika: Rabai Hills bei Mombasa. Insel Sansibar = nanga dume.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: Mapinga → Konduchi * XII, Z^1 (P 14792); im Walde über Pugu, die Knolle treibt eben aus X = hunsuru (kisaramo)!!; Succulentenpori bei Msua $^-$ XI (P 31712); Msua → Bagalla bei km 98.5—99.5, * XI, Z^2 (P 31840, 31906, 45494); Soga → Baha * XII, $V^3 Z^1$ (P 14889); Baha → Bagamoyo * XII, $V^2 Z^1$ (P 14969). — Udigo: Waldartige Baumsteppe Amboni → Gombero 30—120 m, * III, Z^2 (P 22945 mit 4 Blütenständen zugleich); Amboni → Pande, auf den Kreidefelsen * IV, $V^2 Z^1$ (P 39503 Blatt 1.3 m lang); Felspartie bei der Fabrik Pande 30 m, junge Blätter III !!. — Mlinga-Gebirge: Longusa → Magrotto 300—630 m, I !!; treibt daselbst das Blatt am 7. II. 1917 !!, Blüte und Blatt gleichzeitig III !!, $^+$ das Blatt wird gelb XI !!; daselbst 600—735 m, Z^3 (P 39988 Blatt 1.2 m hoch, mit Blattbrut); daselbst 500 m, * V mit 3—5 Spathen $V^3 Z^2$!!; Magrotto → Muhesa 700 m, II !!; Magrotto → Magila 750 * II, Z^{2-3} (P 19486); daselbst 700—735 * IV, $V^3 Z^{1-2}$ Schaft 1 m, Blatt 1—1.5 m hoch !!. — Handeï: Tengeni im Pori 300 m IV !!; Sigi → Pandeni bei Bumbuli im Urwalde km 21.5, 430—400 m III, die Blätter treibend !!; oberhalb Longusa 170—400 m IX (ENGLER 421 !); Longusa → Sigi-Fluß 250 m, $^+$ III !!; Longusa → Maramba 300—280 m VI !!; bei Mwesini 720 m, $^+$ VI bis 2 m hoch !!; Maramba → Kichangani 280—300 m, IX, XII !!; Urwaldschlucht bei Kichangani 320—350 m, VI !!; Pflanzung Mhinduro 300 m, Blatt jung, $^-$ IX (P 25025); Kwamtili → Maneno Mbangu 300 m, X Blattstiel ungefleckt !!. — Ost-Usambara: Amani * II (BRAUN in Herbar. Amani 1094 !); unter Kyumba bei Amani 800 m * III (P 19905); Amani, am Ilsenstein 650 m * III !!; Sigital unter Amani 800—500 m, ^{0} V (P 3582, 3584, 3807, 10074); Ngambo → die Hochweiden 1000 m, $^-$ IV, Z^3 !!; Schlucht Kerenge → Monga 350—1100 m III, wuchs auf morschem Baumstamm !!; Kijango → Herthahöhe im Urwalde 780—500 m VIII !!; Magunga (bei Korogwe) → die Sägemühle von Mnyussi 500 m, ^{0} XII (P 18677); Magunga → Kitiwu 350 m, $^-$ VIII, $V^1 Z^2$ (P 12832). — West-Usambara: Kijango → Mashewa im Tarchonanthus-Walde 400—450 m, IV !!; oberes Boshatal bei Mashewa, auf der Paßhöhe 620 m, * IV 6 Blütenstände gleichzeitig auf der Knolle, Ständer gefleckt !!; Bungu → Ambangulu 1040—1060 m, * II (P 15615 2 Spathen);

Bungu → Ngaráya 1040—1100 m, III, Z^3 !!; Ngaraya → Sakarre 960—980 m, III = shugulu !!; Ngaraya → Kwashemshi 950—800 m, * III, gleichzeitig erscheinen auch die Blätter, deren Stiele gefleckt !!; Balangai → Fingo bei der Dorfgruppe Mkalie 750 m, * III 3 Spathen zu 1 Blatt (P 16167); Fingo → Kerenge in Baumpori 360 m, * III 2 Blütenstände zu 1 Blatt !!; Gomba-Berg bei Makuyuni 540 m II, $V^1 Z^1$ (P 15492); Kwai 1600 m XII (ALBERS 335 !). — Useguha: Dorfinsel Hale im Pangani-Fluß 180 m VIII !!; Uferwald bei der Pangani-Insel kwa Kilanga unweit Hale 300 m, ‾ V (P 46559 Sämlinge); Ngerengere-Fluß → Ngotsche, Miombowald 600 m, * XI (P 7175); Tuliani → Kanga 430 m XI 1.20 m hoch !!; Mlembule → Msinga im Miombowald 650—600 m, * XI ganz unten fast in der Erde (P 7319); Succulentenpori Pongwe → Handeni 550—500 m XI !!; Handeni → Sindeni 700—410 m XI (P 7456). — Ukami: steiniges Bachbett bei Morogoro 580 m * XI (P 32002, 1.5 m hoch). — Uluguru-Gebirge: Schluchtenurwald südlich über Schlesien bis 1600 m, * XI (P 45548). — Ussagara: Ausgang des Mukondokwa Tales bei Kilossa 500 m ‾ XI, $V^1 Z^1$ (P 32604 Knolle 12 × 5 cm, flach, hellfarbig, rundherum lang bewurzelt).

var. lanceolatus ENGL. in Pflanzenreich IV 23 B (1905) 306.

Deutsch-Ostafrika, Kilwa: bei Mitole * XII (BUSSE 463 !). — Uluguru-Gebirge: Mkambaku bei Morogoro 2000 m * X (BREHMER 395 !, 803 !). — Sansibar * X (STUHLMANN 23 !).

2. **G. angustus** NEBR. in Flor. trop. Afr. 8 (1901) 197. — Mit Knolle, 1 Blatt. Vorblüher, Spatha blaß. — Mossambik: Lourenço Marques 150 XII (SCHLECHTER 11722 !); bei Boruma im Sambesi-Gebiet auf Bergen !

DOstafrika, Useguha: Kissauke → Kanga ‾ XII, $V^1 Z^1$ (P 14698); Kanga → Dakawa in waldartigem Pori * XII (P 15023).

13. Zamioculcas SCHOTT.

Blättchen dick, elliptisch- oder obovat-lanzettlich, spitz. Spatha unten mit 2 cm langer Scheide, auf dem Rücken unterhalb der Spitze mit einem fast 1 cm langen Anhängsel. 1. **Z. Loddigesii.**

— dicklich, lanzettlich, zugespitzt—spitz. Spatha unten nicht scheidig, ihre Ränder bis zum Grunde frei, sehr spitz—zugespitzt, ohne Anhängsel. 2. **Z. lanceolata** n. spec.

Z. Loddigesii SCHOTT Syn. Aroid. (1856) 71; ENGL. in Nov. Act. Acad. Leopold. Carol. Nat. cur. 39 (1877) 201 tab. 13 fig. 24; ENGL. PR. Pfl.familien II, 3 (1887) 117 fig. 75; ENGL. Pfl.reich IV

23 B (1905) 305 fig. 85; HOOK. in Bot. Mag. tab. 5985 = *Caladium zamiifolium* Lodd. Bot. Cab. 15 (1828) tab. 1408. — In den Blättern öfters die endophytische Alge Phyllosiphon asteriforme TOBLER[1]).

Bourbon. BritOstafrika: Rabai Hills bei Mombasa. Insel Sansibar (HILDEBRANDT !).

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: am Strande südlich des Hafens von Daressalam ⁻ VIII, $V^1 Z^1$!!; Msua → Bagalla, Succulentendickicht bei km 99—99.5, ⁻ XI (P 31903). — Udigo: Amboni → Gombero, Bach über Felsgrund ⁻ IV, $V^1 Z^2$!!; Amboni, Felspartie bei der Fabrik Pande 30 m III !!; daselbst auf Kreidefelsen ⁻ IV, Z^3 !!; Kilomoni → die Sigahöhlen auf Kreidefelsen 20 m III !!. — Tanga: Mwera, Flußtal des Mnuaza im Urwald bei Langoni ⁻ IV, $V^2 Z^1$ (P 39918). — Mlinga-Gebirge: Longusa, Aufstieg → das Gebirge 300—600 m * XI (P 22021); Magrotto → Longusa ⁻ I, V !!; daselbst 680 m ⁻ II mit der Alge in den Blättern !!; Magrotto → Magila 750 m ⁺ II (P 19487). — Handeï: Sigi → Longusa 500—450 m III !!; Urwaldparzelle bei km 21.5 unweit Bumbuli 430 m III, $V^2 Z^2$!!; Sigi → Pandeni 450—400 m IX !!; Sigi-Uferwald unterhalb Longusa 250 m III, V !!; Longusa → Maramba 300—280 m V !!; Maramba → Kichangani, Urwaldschlucht 280—350 m ⁻ VI, IX, XII (P 22139); Maramba → das Gebirge, Bach im Urwald mit großen Felsblöcken 400 m VI !!; daselbst im Buschpori 260—400 m ⁻ VI (P 21180 mit Blattbrut); Maneno Mbangu → Kwatumbili in Kautschukpflanzung 300 m ⁻ X !!; Wald bei Maneno Mbangu 300 m X !!; Urwald Maneno Mbangu → Mhinduro 280—300 m VI !!. — Ost-Usambara: Amani → Sigi am Kwamkuyu-Bach entlang 700—600 m, jung I (P 18940); Amani → Sigi am „Steinigen Weg" 650 m XI (P 21937^b); bei Sigi 500 m I !!; Amani, Ilsenstein → die Kwamkuyu-Fälle 700—800 m I !!; Steilhang Derema → Sigi 800—550 m V !!; Longusa → Sigi, Hauptweg 400—500 m V !!; Hochweiden an der Ostseite des Lutindi-Berges 780—800 m VIII, Z^2 (P 13031[1])). — West-Usambara: Buiko → den Manka-See 560—400 m ⁻ VI, VII, $V^1 Z^2$!!; im Baum-Busch-Pori von Gomba bei Makuyuni 450 II (P 15332); Gomba, Wald am Mbala-Berge 500—540 m II, Z^{4-5} !!; Hemagoma, Kulasi → Kalange im Succulentenwald 500—1000 m IV, $V^1 Z^{3-4}$!!; Urwald Mashewa Aufstieg → Mission Emmau 500—700 m IX !!; daselbst beim Dorfe Gare auf Felsen 700 m IX, Z^4 !!; Mashewa → oberes Boshatal, Urwald 445—

1) Mit der parasitischen Alge Phyllosiphon asteriforme TOBLER in Pringsheims Jahrb. wiss. Bot. 58 (1919) S. 1—27 Taf. 1 und 11 Textfiguren.

550 m IX !!; im oberen Boshatal bei Mashewa 500—600 m VIII (P 13258); Gegend Ngulumi bei Mashewa, Wald am Sattel 840 m IX !!. — Süd-Pare: Mkomasi → Mkumbara km 161—168 Baum-Busch-Pori 480—500 m VI (P 10707); Makania-Pflanzung → Bahnstation 720 m III (P 2989); Succulentenpori beim Dorf Makania 680 m VII !!. — Süd-Pare-Gebirge: Wudee-Tal → Makania 1200—680 m II, V^3 !!. — Useguha: Dorfinsel Hale im Pangani-Fluß 180 m VIII !!; Pangani-Inseln bei Hale 180 m I (P 8341); Pongwe → Handeni im Succulentenpori 550—500 m * XI (P 7397); Succulentenpori Handeni → Sindeni 700—410 m XI, $V^3 Z^2$!!; Dakawa → Kanga im Gestrüpp XII !!; Saadani → Buyuni, Grassteppe mit Blasen-Akazien XII, Z^3 !!; daselbst Hügel am Fluß Mnigazi XII !!.

2. **Z. lanceolata** APeter n. spec. — S. 220.

Mossambik, Beira: im Urwalde bei Dondo ¯ X, $V^1 Z^1$ (P 31194); die lebend nach Göttingen mitgenommene Pflanze ist hier zum Blühen gelangt im Jahre 1928.

Die Gattung *Zamioculcas* war bisher monotypisch.

14. **Heterolobium** APeter n. gen. — S. 221.

Unterste Blattfiedern sehr klein, unregelmäßig zerschlitzt; an den mittleren Fiedern I. Ordn. sind die basalen Fiedern II. Ordn. im Umriß ± kreisrund, jedoch unregelmäßig lappig und eingeschnitten, die übrigen Fiederblättchen viel größer, ± elliptisch. 1. **H. dilaceratum** n. spec.

— — zerteilt in kleine langgestielte lanzettliche sehr spitze Abschnitte; obere Fiederblättchen sehr viel größer, lanzettlich bis elliptisch-lanzettlich. 2. **H. petiolulatum** n. spec.

1. **H. dilaceratum** APeter n. spec. — Knolle; 1 senkrecht stehendes Blatt. — Fig. 5.

Deutsch-Ostafrika, Handeï: Bamba → Mhinduro 280—300 m in tiefem Humus ¯ IX, $V^2 Z^2$ (P 24998, 25005).

2. **H. petiolulatum** APeter n. spec. — Dicke faustgroße weiße saftige Knolle; 1 senkrechtes Blatt. Spatha weiß. — Fig. 6.

Deutsch-Ostafrika, Usaramo: bei Msua unter Gebüsch → Bagalla hin bei km 99—99.5, * XI Spatha grün, Spadix gelblich, $V^1 Z^1$ (P 31907, lebend in den botan. Garten Göttingen mitgenommen, hat noch nicht geblüht). — Ukami-Usaramo: ? zwischen Ruvu und Gohingo im Pori * XI Spatha weiß, zurückgefallen, Kolben gelb, ganz mit Blüten besetzt !!.

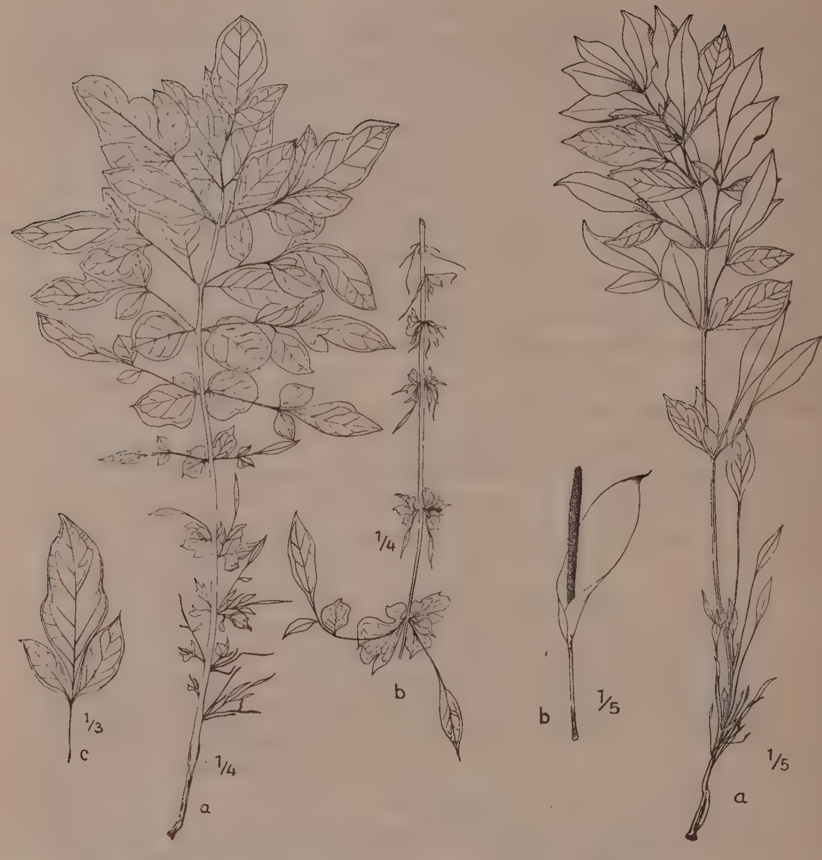


Fig. 5. Heterolobium dilaceratum n. spec. a das ganze Blatt; b untere Hälfte eines anderen Blattes; c Endfiedern.

Fig. 6. Heterolobium petiolulatum n. spec. a das ganze Blatt; b Blütenstand.

15. **Microculcas** APeter n. gen. — S. 222.

Blatt bis 45 cm, davon der Stiel 25 cm lang, Spreite bis 20 × 25 cm; Blättchen bis 55 × 15 mm, ± schmal elliptisch, nicht herablaufend. 1. **M. marattioides** n. spec.

— — 37 cm, davon der Stiel 20 cm lang. Blättchen bis 70 × 2 mm, lineal, herablaufend. Pflanze zierlicher als die vorige. 2. **M. pteroides** n. spec.

1. **M. marattioides** APeter n. spec. — S. 223, Fig. 7.

Deutsch-Ostafrika, Handeï: Maramba → Mhinduro 280 m, zwischen hohen Staudengräsern auf nacktem Erdreich der Zwischen-

räume ⁻ VI, IX, XII, $V^1 Z^2$ (P 20924, 21240, 22294, 22492, 24994; wurde in Amani kultiviert und kam zur Blüte XI P 25713b); Mhinduro → Maneno Mbanga 280—300 m, ⁻ VI, ⁻ XII (P 20929, 22148).

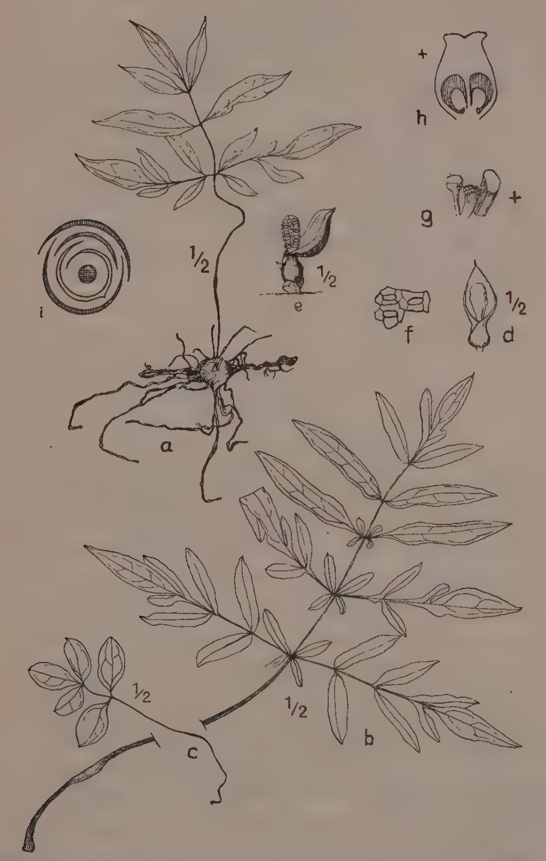


Fig. 7. Microculcas marattioides n. spec.
a eine kleine ganze Pflanze; b ein ausgewachsenes Blatt; c Blatt einer jungen Pflanze; d Umriß eines Blütenstandes; e Blütenstand von der Seite gesehen; f einige ♂ Blüten, Aufsicht, vergrößert; g Teile der ♂ Blüte: 1 Perigonblatt, 1 Staubblatt, Pistillodium, stark vergrößert; h Längsschnitt des Fruchtknotens, sehr stark vergrößert; i Diagramm: 3 Niederblätter, 1 Laubblatt, Spadix.

2. **M. pteroides** APeter n. spec. — S. 225, Fig. 8.

Deutsch-Ostafrika, Ost-Usambara: Wald Makumba → Korogwe 360 m ⁻ IV, $V^1 Z^2$ (P 16318).

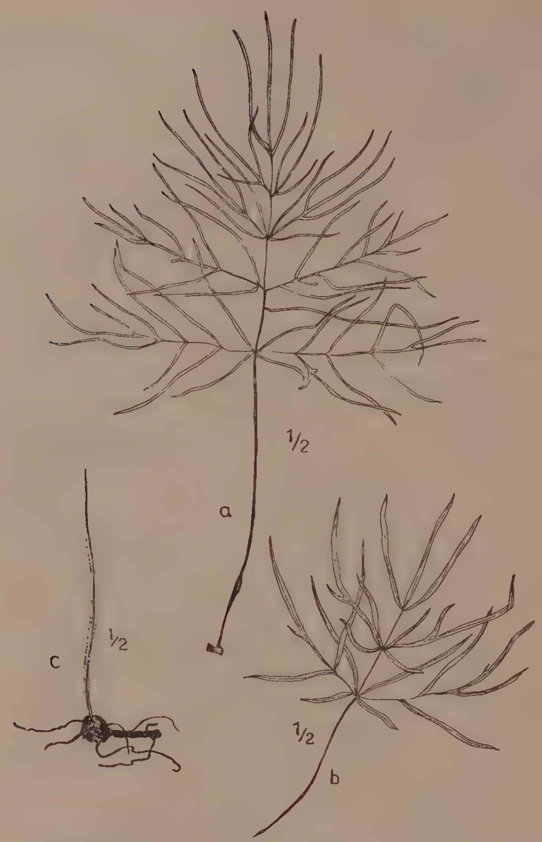


Fig. 8. Microculcas pteroides n. spec.
a ein Blatt; b ein kleineres Blatt; c der untere Teil einer Pflanze.

Beschreibungen der neuen Arten und Varietäten.

Amorphophallus anisolobus APeter n. spec. — S. 191.

Planta acaulis, elata, herbacea. Rhizoma tuberosum stolониferum, stolones breves apice iterum tuberiferi. Folium solitarium hysteranthium ad 1.25 m longum erectum herbaceum glabrum; petiolus basi cataphyllis 2 brevibus membranaceis obtectus ad 80 cm altus rectus gracilis pallidus, maculis parvis brunneo-purpurascentibus dense pictus; lamina bipinnatisecta basi tripartita, segmenta I. ordinis lobis anisomorphis exstructa, inferioribus nempe parvis (2—5 cm longis) ± ovalibus rotundato-obtusis, intermediis similibus sed gradatim increscentibus, superioribus subito multo majoribus oblongis acutissime elongato-acuminatis, ultimis ad 18 × 7 cm margine

± irregulariter grosse lobato vel subintegro, omnibus basi in rhachin decurrentibus itaque praecipue superioribus inter sese ± late confluentibus. Pedunculus 33—38 cm altus erectus rectus robustus laevis. Spatha (deflorata fructifera) c. 12 cm longa, basi 3—3.5 cm lata convoluta subinflata, margine latissimo expanso undulato, extus dense striata, intus inferne longitudinaliter costulata costulis atropurpureis superne anastomosantibus ornata. Spadix quam spatha brevior; inflorescentiae pars ♂ cum ♀ contigua 1.8 cm, appendix (exsicc.) subconico-cylindrica c. 3 × 0.8 cm; pars fructifera subglobosa 4 × 2.5 cm ovoidea. Fructus obconici carnosi aggregati; stigma sessile disciforme orbiculare. — Specimina authentica P * 35816, ⁰ 35690. — Nach der Beschreibung im „Pflanzenreich" IV 23 C (1911) 72 scheint diese Pflanze große Ähnlichkeit mit *A. Unyikae* Engl. et Gehrm. zu haben, doch ist der Ständer bei *A. anisolobus* viel länger und dicker, der Appendix kleiner. Da das Blatt von *A. Unyikae* nicht bekannt ist, bleiben Zweifel an der Identität beider bestehen.

Amorphophallus linearilobus APeter n. spec. — S. 191.

Planta quoad altitudinem mediocris herbacea acaulis. Tuber (exsicc.) plus quam 2 cm crassum, 1.5 cm altum depresso-globosum. Cataphylla inconspicua. Folium solitarium hysteranthum cum petiolo 40—60 cm altum erectum herbaceum glabrum; petiolus usque ad 38 cm longus, in dimidia parte inferiore purpureo-maculata incrassatus subspongiosus superne attenuatus; lamina 16—18 cm longa flabelliformis basi 3 partita, partes iterum semel vel bis bipartitae, pinnae simpliciter pinnatisectae vel apicem versus segmento uno alterove in tertium gradum secto; segmenta (inferiora minora) ± linearia vel ± lanceolata (4 × 0.3 cm usque 4.5 × 0.8 cm), omnia subaequalia basi in rhachin attenuato-decurrentia itaque confluentia, apice longe acuminata acutissima. Pedunculus c. 15 cm longus validus glaber. Spatha jam destructa. Spadicis pars basalis fructifera c. 11.5 cm longa; fructus carnosi aurantiaci subglobosi; stigma sessile trilobum. — Specimina authentica: P 34258, 35575.

Amorphophallus anguineus APeter n. spec. — S. 192, 195, Fig. 1, 2.

Planta viva 113 cm alta, sed pedunculus cum spadice a basi ad spadicis apicem c. 135 cm longa. Tuber valde depresso-globosum (sicc.) ad 5 cm latum, 2.5 cm altum, superne radices tenues elongatas emittens. Cataphylla 3 membranacea parvimaculata, summum maximum spadicem superans c. 50 cm longum, 6 cm latum. Folia desiderantur, cum floribus haud coaetanea. Pedunculus 25 cm longus, ad 3 cm crassus erectus glaber. Spatha 38 cm longa, 10 cm lata,

basi campaniformi c. 11 cm, lamina ad 26 cm longa subexplanata extus grisea intus purpurea, in fundo emergentiis piliformibus brevibus dense vestita, superne glabra late acuminata, apice ipso obtuso, margine undulato plicato. Spadix cum appendice in vivo c. 110 cm longus; pars ♀ basalis c. 3 × 3 cm, pars ♂ contigua c. 8 × 5 cm; appendix basi cum inflorescentia aequilata c. 1 m longa sensim apicem versus attenuata, primum stricte erecta demum inclinata denique apice ad terram procumbens quasi anguiformis. Stamina partem basalem inflorescentiae densius, apicalem sparsius investientia. Flores feminei non arcte approximati; stigma discoideum orbiculare sessile. — Specimina authentica P 32615, 32458.

Die Art hat nach der Beschreibung in Flora trop. Afr. 8 (1901) 157 eine gewisse Ähnlichkeit mit *Amorphophallus accrensis* NEBr., jedoch ist bei *A. anguineus* der ♀ Teil des Blütenstandes viel kürzer, die Spatha doppelt so groß, der Appendix doppelt so lang, die Narbe kreisrund.

Stylochiton fissus APeter n. spec. — S. 199, 202, Fig. 3.

Planta robusta acaulis ad 80 cm alta herbacea epilosa. Rhizoma verticale ad 12 cm longum, digiti crassitie (2—2.5 cm), sordide viridis rudimentis foliorum vetustorum nigricantibus vestitum. Folium in quovis rhizomatis ramo solitarium amplum; petiolus 30—60 cm longus robustus; lamina subcoriacea usque ad 48 × 40 cm, ovata usque ± orbicularis, apice obtuse-acuminata, basi ± cordata vel subsagittata, lobis basalibus (saepius haud conspicue effiguratis) magnis obtusis non raro ± divergentibus, marginibus integerrimis vel ± repandis; saepe (non semper!) lamina inter nervos 3—4 crassis lateralibus I. ordinis ± irregulariter fissa vel partita, utrinque nervis basalibus atque nonnullis lateralibus basi crassitie insignibus superne iterum iterumque ramosis instructa. Flores non adsunt. — Specimina authentica: P 35964, 35981.

Da keine Blüten beobachtet werden konnten, ist die systematische Stellung der Pflanze nicht sicher, sie macht aber doch am ehesten den Eindruck der Zugehörigkeit zur Gattung *Stylochiton*. — Sehr auffallend ist die starke Neigung der Blätter zur Schlitzung bezw. Zerteilung der Spreite in mehrere Stücke. Nicht infolge äußerer Kräfte (Windwirkung), sondern aus inneren Ursachen vollzieht sich hier ein Vorgang, den man mit jener Spaltung der Blätter bei anderen Araceen (Arten von *Monstera*, *Philodendron*, *Raphidophora* etc.) und bei Palmen vergleichen und gewissermaßen als deren Vorläufer betrachten kann: ein Gewebestreifen zwischen den derberen unteren Seitennerven der Mittelrippe bleibt bei der Streckung der Lamina im Wachstum zurück, wird

zerrissen und verursacht so die Herstellung eines Loches oder Schlitzes, der sich durch den Rand des Blattes fortsetzen und die Spreite in unregelmäßige Abschnitte zerlegen kann.

Stylochiton tenuinervis APETER n. spec. — S. 200, 202.

Planta acaulis, spectabilis, epilosa, ad 75 cm alta. Rhizoma verticale crassiusculum 3 cm altum diphyllum, radicibus crassis numerosis elongatis ramosis exstructum. Collum cataphyllis tenuiter membranaceis vel eorum reliquiis non vel vix dilaceratis velatum. Folia: petiolus 30—50 cm longus sat gracilis vel robustus basi alte vaginatus; lamina subpergamenea laete viridis usque 24—28 × 15—18 cm plerumque ± cordato-sagittata acuminata apice acutissima, margine repanda, lobis basalibus magnis rotundatis in foliis adultis ± divergentibus, plantarum juvenilium folia ± ovatooblonga basi truncata vel rotundata lobis carentia; nervis numerosis plurimis (c. 7—10) basalibus, omnibus aequalibus tenuibus, 5—6 a costa sub 20—30° abeuntibus. Pedunculus 7 cm altus epigaeus validiusculus, spatha? (deflorata). Fructus maturi carnosi glomerulum globosum 2 cm crassum efficientes, stylo nullo, stigmate disciformi orbiculari. — Specimina authentica P 36261, 36440. — Species *St. fisso* proxima videtur, foliis nunquam fissis, laminae nervatura longe discrepans.

Die Blätter fallen nicht nur durch den starken Wechsel des Umrisses, sondern auch dadurch auf, daß die zahlreichen Nerven I. Ordnung des Blattgrundes ebenso wie die von der Mittelrippe ausgehenden sämtlich annähernd gleichartig und gleichstark, aber dünn sind, und daß auch die oberen Seitennerven I. vom Ansatzpunkt des Blattstieles unmittelbar neben der Mittelrippe emporlaufen und von ihr erst ± weit oben frei werden.

var. pubescens APETER. Petiolus cum nervo mediano subtus pubescens, lamina caeterum glabra. — Specimen authenticum P. 36367b. Es ist nur 1 Blatt vorhanden, das nachträglich unter dem getrockneten Material gefunden wurde.

Stylochiton heterophyllus APETER n. spec. — S. 200, 204.

Species collectiva foliis valde diversis generatim anguste oblongis, pro toto visis pluries [(3.5—)5—8 ties] longioribus quam latioribus. Colli fibrilli parum evoluti. Rhizoma breve obliquum vel perpendiculare crassum radices numerosas parum incrassatas emittens. Folia mediocria herbacea glabra, pedicelli elongati graciles, pedunculi subelongati, spatha cylindrica c. 10—15 cm longa.

form. subcordatus APETER. — S. 200.

Foliorum lamina longe-oblonga vel oblanceolata 20—22 × 2.5—3 cm, basi subcordata lobis parvulis rotundatis vix ad 5 mm longis

declinatis, apice acuta mucronata, margine subundulato integra; vagina basi lata magnam petioli partem occupans purpureo-maculata. — Specimina authentica P 34249 fructifera.

form. lobulatus APeter. — S. 200.

Foliorum lamina 14—17 × 3—4 cm linearilanceolata, a triente parte superiore in apicem attenuata, acutissima longe mucronata, basi cordato-hastata lobis subsegregatis minutis ± extrorsum divaricatis rotundato-obtusis usque suborbicularibus praedita. Spatha 10 cm longa. — Specimina authentica P 33288.

form. sagittatus APeter. — S. 200.

Foliorum lamina anguste sagittata 15—17 × 3—5 cm, a basi ad apicem subaequaliter attenuata, apice ipso obtusa mucronata, lobis basalibus breviter triangularibus declinatis vel vix recurvis c. 3—3.5 cm longis. Spatha 10 cm longa. — Specimina authentica P 32931.

form. hastatus APeter. — S. 201.

Foliorum lamina anguste hastato-sagittata 17—22 × 3.5 cm, a petioli insertione sursum sensim attenuata marginibus subparallelis, apice ipso obtusiuscula sed conspicue mucronata, lobis basalibus elongatis late linearibus c. 5 cm longis ± hastato-divaricatis. Spatha 12—15 cm longa. Collum rhizomatis conspicue fibrosum. — Specimina authentica P 32950.

Stylochiton cuculliferus APeter n. spec. — S. 201, 205.

Planta perennis acaulis humilis herbacea glabra. Rhizoma obliquum crassum (sicc. c. 18 mm), radices basi tenues apicem versus subincrassatas emittens. Cataphylla basin foliorum et pedunculos involventia magna (ad 12 cm) tenuiter membranacea saturate brunnea acutissima. Folia 2 herbacea longe petiolata glabra. Petioli graciles 32—35 cm longi debiles (exsicc.) 2.5 mm crassi, in triente parte inferiore vaginati ibique (exsicc.) costulis crebris obliquis subreticulatim anastomosantibus coloratis ornati. Lamina late sagittata ad 23 cm (a petioli insertione ad apicem 14 cm) longa, pars mediana triangulari-oblonga in apicem attenuata mucrone 3 mm longo applanato donata, margine integro subrepando; lobi basales divergentes similes triangulari-oblongi ad 10 cm longi, sinus satis angustus. Pedunculi pro stirpe complures, craetanei 8—10 cm longi erecti, graciles, teretes. Spatha c. 4 cm longa, basi (1.5 cm) inflata fructus involvens, superne multo angustata (c. 0.7 cm) cylindrica, apice replicativo quasi cucullata, lamina cymbiformis apice acuta longe mucronata. Spadix ex spathae ore floribus ♂ emergens. — Specimina authentica P 35590.

Stylochiton obliquinervis APeter n. spec. — S. 201, 206.

Planta humilis acaulis c. 20 cm alta glabra. Rhizoma subramosum, rami breves c. 1 cm crassi suberecti radices numerosas elongatas crassiusculas emittens. Cataphylla membranacea mox evanescentia, denique fibras nonnullas tenues relinquentia. Folia 2 herbacea obscure viridia; petiolus dimidia parte inferiore vaginatus ad 10 cm longus gracilis debilis; lamina oblonga marginibus subparallelis integerrimis, usque 15 × 6 cm, acuminata mucronata, basi leviter cordata, lobis rotundatis vix prominulis; nervi basales I. ord. utrinque 2—3, laterales complures a mediano sub angulo c. 30—40° abeuntes omnes aequales tenues. Flores desunt. — Specimina authentica P 36138. Die Stellung im System ist nicht zu bestimmen, weil Blüten nicht gefunden wurden. Ein Versuch, die Pflanze zu kultivieren, ist nicht gelungen.

Stylochiton angustifolius APeter n. spec. — S. 202, 206, Fig. 4.

Planta humilis acaulis herbacea glabra. Rhizoma ramosum, rami 4—5 cm longi, plus quam 1 cm crassi curvati, toto longitudine radices numerosas graciles emittens; cataphylla membranacea evanescentia. Folia 3—4 herbacea; petiolus 18—25 cm longus, a basi usque ad mediam partem late laxeque vaginatus ibique saepe transverse maculatus superne gracilis; lamina anguste et graciliter sagittata vel hastata, 10—20 cm longa, herbacea, epilosa, a petioli insertione lanceolato-linearis sensim attenuata acutissima et mucronata, margine integra, lobi basales ± divergentes lineares 4.5—6.5 × 0.4—0.6 cm, apice obtusi. Pedunculus 2.5—4.5 cm longus sat gracilis (sicc.) striatus erectus; spatha 16—20 cm longa, c. 12 mm lata, tubulosa cylindrica, ima basi parum ampliata, tum pro 3—4 cm angustata, superne iterum sensim dilatata sub ore leviter contracta, ore laterali, lamina triangulari c. 3 cm longa acuta erecta integerrima. — Specimina authentica P 14994, 31809.

form. lanceolatus APeter. — S. 202.

Folii pars apicalis lanceolata 14—16 cm longa, basi (2—)3—4.5 cm, in media parte c. 2 cm lata; lobi basales lineares 5.5—8 × 0.6—0.8 cm. Radices elongatae apicem versus anguste fusiformi-incrassatae. — Specimina authentica P 31722.

Stylochiton tubulosus APeter n. spec. — S. 202, 206.

Planta inter minoribus, acaulis. Rhizoma ramosum, ramis c. 4 cm longis, 8 mm crassis cylindraceis curvatis nigricantibus. Radices numerosae valde elongatae pro genere graciles. Cataphylla 3, membranacea superiora pedunculum paullum superantia acuta haud dilacerata pedunculum velantia. Folia non coaetanea, desiderantur. Pedunculus solitarius 5—6 cm altus, validus teres; inflorentia epi-

gaea, spatha elongato-usque ad apicem recta, cylindrica, tubo ad 11.5 cm longo, a basi 8 mm lata ad apicem (c. 13 mm) sensim ampliato extus nervis crebis striato, orificio laterali c. 3 cm longo, lamina lanceolata acutissima. Spadix e spatha emergens, usque ad apicem floribus occupatus, appendice nullo; flores masculi non valde approximati, filamentis c. 1 mm longis; flores feminei a masculis spatio nudo tenui c. 1.5 cm longo distantes, ad imam spadicis basin pauci (c. 4) uniseriales arcte approximati, ovarium liberum, stylus 3 mm longus, stigma capitatum. — Specimina authentica P 45584.

Scheint mit *St. grandis* verwandt zu sein, die Inflorescenz ist aber nicht unterirdisch, die Röhre der Spatha sehr viel länger.

Zamioculcas lanceolata APeter n. spec. (descriptio a planta viva culta). — S. 209, 211.

Planta acaulis herbacea silvestris, rhizomate crasso turiones breves emittente. Folia basalia ad 60 cm longa valida viridia; petiolus c. 20 cm longus basi (ad 2 cm) incrassatus sursum attenuatus cylindricus, cum laminae rhachide transverse grosse obscure-maculatus, infra laminam nodoso-geniculatus; lamina ad 40 cm longa pinnata, foliolis utrinque c. 8 alternis vel partim ± oppositis lanceolatis basi in petiolulum brevissimum (1—2 mm) attenuatis, apice acuminato-acutis, integerrimis attamen subrepando-undulatis crassiusculis epilosis 10—11 × 3.5—4(—5) cm, margine haud punctatis, sponte deciduis basi tubera demum plantam juvenilem gignentibus. Inflorescentia basalis; pedunculus 4—6 cm longus 0.5 cm crassus teres glaber ± recurvatus; spatha subcoriacea c. 7 cm longa 3 cm lata ovata convoluta haud vaginata (marginibus usque ad basin liberis), basi spadicis partem inferiorem arcte subgloboso-amplectens demum reflexa plana tortuosa (nec cymbiformis) margine integerrimo, apice acuminata (nec infra apicem cornuta) acutissima, extus dilute viridis sed punctis nigricantibus frequentissimis conspersa, intus lurida immaculata laevis 5-nervis. Spadix cylindricus 6 cm longus in triente inferiore constrictus densiflorus albidus inferne flores femineos superne masculos media parte constricta steriles omnes contiguos gerens. Flores ♂ spadicis totum apicem 3.5—4 cm longum subclavato-cylindricum rotundato-obtusum occupantes, perigonio tetramero, tepalis 2 exterioribus squamiformibus, interioribus clavatis longitudinaliter complicatis, omnibus apice truncato-rotundatis, staminibus 4 brevibus, pistillo sterili claviformi tepala aequante; flores steriles similes staminibus carentes pistillo rudimentario clavato praediti; florum ♀ tepala exteriora conspicue squamiformia interiora clavata, omnia apice truncata, pistillo ovato, stilo brevissimo, stigmate apice transverse-elliptico ceraceo tepalis paullo

breviore. — Speciei *Z. Loddigesii* arcte affinis, a qua foliolis angustioribus tenuioribusque, spatha usque ad basin fissa superne explanata cuspidato-acutissima differt. — Specimina authentica: P 31194. Planta in hortum botanicum Gottingensem viva introducta m. Julio 1928 floruit.

Heterolobium APeter nov. genus (Inflorescentia in H. petiolulato tantum nota). — Zamioculcaseae.

Spatha oblonga infundibuliformis contorta apice cucullata acuminata spadicem parum superans. Spadix ca. 20 × 1.5 cm teretiusculus, superne pro maxima parte floribus ♂ dense aggregatis totaliter vestitus, inferne floribus ♀ numerosis obtectus, floribus intermediis sterilibus biseriatis, omnibus contiguis. Flores ♂ perigonio tetramero atque ovarii rudimento, flores ♀ staminibus rudimentariis exstructi, stigma agariciforme sessile. — Herbae spectabiles acaules e tubere crasso monophyllae; folium erectum bi -vel tri-pinnatum pinnis compluribus valde inaequalibus, basilaribus nempe parvis vario modo dilaceratis, superioribus ± integris multo majoribus; petiolus nodo incrassato („genu") ut in Zamioculcade gaudens. Inflorescentia alte pedunculata, spatha spectabili albescente. — Species 2 Africam orientalem germanicam inhabitantes.

Heterolobium petiolulatum APeter n. spec., ad vivum in loco natali descriptum: Tuber subterraneum pugillare album subglobosum, basi subirregulariter exesum, supra verrucis crassis planis conspersum proliferantibus. Folium solitarium ca. 75 cm longum erectum ambitu elongato-obovatum bipinnatum petiolo brevi (7 cm) supra basin genuatim incrassato, pinnis primariis valde heteromorphis, infimae dilaceratae segmentis longepetiolatis lamina parva ± lanceolata instructis; pinnae mediae et superiores ± pinnatae segmentis ± sessilibus; summae iterum partitae. Pedunculus ca. 40 cm altus viridis haud maculatus glaber teres inconspicue 2-angularis. Spatha oblonga spadicem parum superans, basi infundibuliformi-convoluta, apice cuculliformis caudata. Spadix flavidoviridis, ca. 20 × 1.5 cm teretiusculus, pro maxima parte superiore floribus ♂ dense approximatis usque ad apicem vestitus, basi in spathae fundo floribus ♀ numerosis obsitus, intermedia parte floribus sterilibus biseriatis, omnibus contiguis. Flores ♂ perigonii squamis 4 atque ovarii rudimento, flores ♀ staminibus rudimentariis stigmate sessili agariciforme saturate olivaceo exstructi. — Specimen unicum authenticum P 31907, adhuc vivum in horto botanico Gottingensi cultum, sed nondum floruit. — S. 211, Fig. 6.

Heterolobium dilaceratum APeter n. spec. — S. 211, Fig. 5.

Tubera hypogaea carnosa (saepius insectis corrosa) dilute colorata ad 10 cm longa et crassa, supra valde applanata, cataphylla nonnulla et folium solitarium ferentia. Folium stricte erectum glaucescens subfragile, 43—80 cm longum ad 30 cm latum ambitu obovatum basin versus attenuatum, imparipinnatum 8—10jugale pinnis suboppositis, superioribus obovatis ellipticis vel subrhomboideis breviter acuminatis ± petiolulatis, inferioribus sensim angustioribus ± irregulariter partitis, imis laceratis; petiolus 8—12 cm longus basi ± vaginatus superne genu subincrassato nodiformi instructus. Flores desiderantur. — Specimina authentica P 24998, 25005).

Blatt 43—80 cm lang, bis 30 cm breit, im Umriß obovat, im oberen Teil sehr breit, im unteren sehr verschmälert, etwas brüchig, straff aufrecht, unpaarig gefiedert mit 8—10 Fiederpaaren, die Fiedern gegenständig; Endblättchen gestielt, obovat oder elliptisch bis fast rhombisch, 10—14 × 2.5—5 cm je nachdem Neigung zu Lappung vorhanden ist oder nicht, kurz zugespitzt, spitz, in den 1—2.5 cm langen Stiel herablaufend; die obersten 2 Fiedern jederseits ± fiederig eingeschnitten mit unten zusammenhängenden Lappen; die 2—3 folgenden Fiedern sind die längsten, fiederig mit ± gestielten Abschnitten, die ebenso wie die Lappen der oberen Fiedern ± die Gestalt und Größe des Endblättchens wiederholen; die dann folgenden 1—2 Fiedern sind schon kürzer als die mittleren, und namentlich ihre basalen Abschnitte sind relativ breiter und kürzer, auch der Rachis des Gesamtblattes näher gestellt als bei den übrigen; die untersten 2—4 Fiedern werden ziemlich plötzlich viel kürzer, kleiner, unregelmäßig zerteilt mit ganz außerordentlich verschieden-gestalteten, -gestielten und -geteilten bis -zerschlitzten Abschnitten, von denen öfters der mittlere — oder mitunter alle — lineal bis fädlich werden, auch rücken diese untersten Fiedern zuweilen ± auseinander, sodaß sie nicht mehr genau opponiert sind. — Beim Trocknen und nachherigen Aufweichen zerfällt das Blatt leicht in die einzelnen Abschnitte.

Microculcas A Peter n. gen. — Zamioculcaseae.

Spatha parva (ca. 3 cm longa) basi convoluta, apice ovata concava divaricata mucronata, spadicem paullum superans. Spadix liber ad 3.2 cm longus subcylindraceus, basi floribus ♀ biseriatis, media in parte contracta floribus sterilibus, apice floribus ♂ numerosis dense obtectus, omnibus contiguis. Flores ♂ tetrameri tepalis carnosis truncatis; stamina 4 libera, antheris filamento transverse affixis rima longitudinali demum poriformi dehiscentibus,

pollen pulveraceum; ovarii rudimentum claviforme. Flores ♀ similes; staminum rudimenta non adsunt; ovarium breviter ovatum apice truncatum stigma sessile breviter bilobum. — Species 2 Africae orientalis germanicae.

Microculcas marattioides APETER n. spec. — S. 212, Fig. 7.

Rhizoma irregulariter tuberosum carnosum ad 10 cm longum 5 cm crassum, superne transverse subannulatum, subramosum dilute brunneum mono-vel pleiocephalum, foliis solitariis basi cataphyllo vaginiformi elongato membranaceo lineari pallido usque $^2/_3$ petioli longitudinis aequante amplexis, praeterea vaginae complures breves ima basi extra vaginam laudatam obviae. Innovatio per stolones subterraneos graciles apice squamis brevibus tenuiter membranaceis vestitos. Folia bipinnata 4—5 juga; jugum infimum longissimum, caetera apicem versus valde decrescentia, jugum summum liberum vel lobo terminali adnatum; pinnae duae inferiores semper usque 4-jugo-pinnatae; pinnulae non vel vix petiolulatae, ± anguste ellipticae acutae vel subacuminatae cuspidatae, margine subundulato-dentatae vel integrae; folia caeterum quoad magnitudinem partitionem pinnarum pinnularumque copiam varia. Petiolus supra basin more Gonatopodis geniculatus. Inflorescentia ± hypogaea 2.5 cm alta, pedunculo 4 cm longo basi cataphyllis 3 inaequilongis pallidis ± late ovatis concavis acutis tenuibus involuto suffulta. Spatha ca. 3 cm longa basi convolutiva uno margine valde supervoluto, superne aperta et lateraliter expansa ibique ovata concava longitudinaliter 4—6-nervis apice cucullata et mucronata, mucrone 1—2 mm longo. Spadix 23—32 mm longus liber subcylindraceus gibberulus, basi floribus femineis horizontaliter biseriatis, media in parte contracta floribus sterilibus ornata, apice floribus numerosis masculis perfecte obtectus, spatiis interjectis nullis. Flos ♂ 2.5 mm altus tetramerus; perianthium 2 + 2, tepala angulatim obpyramidata carnosa apice truncata; stamina 2 + 2, filamenta libera breviter linearia succulenta, antherae biloculares filamento transverse affixae, rima longitudinali denique in porum rotundum ampliata dehiscentes; ovarii rudimentum pistilliforme basi stipitiforme gracile superne clavatum; pollen pulveraceum, haud filiformi-conglutinatum. Flos ♀ 2.5 mm altus masculo persimilis etsi tepala quoad magnitudinem formamque subirregularia, staminum rudimentis omnino nullis; ovarium breviter ovatum, dorso et infra applanatum apice truncatum, stigmate arcte sessili (non capitato) breviter bilobo; ovula in quoque loculo solitaria anatropa ima basi loculi inserta, pulpae hyalinae gelatinosae immersa. Flores intermedii spadicis perigonio gaudentes at sta-

minibus carentes et ovario sterili instructi. Fructus subterranei vel parum epigaei. — Specimina authentica P 24994, 25713[b].

Blätter doppelt-4—5 paarig gefiedert; das unterste Fiedernpaar ist das längste, die anderen nehmen an Länge rasch ab, so daß der Gesamtumriß des Blattes fast quadratisch ist; das oberste Fiedernpaar kann frei sein oder mit dem Endlappen des Blattes ± zusammenfließen. Immer sind die beiden oberen Fiedernpaare ungeteilt, das folgende kann am Grunde kurz-stumpflappig sein, die beiden untersten Fiedernpaare aber sind stets ± (bis 4 paarig) gefiedert, so daß das unterste Paar der Fiedern II. Ordnung ganz unten an der Rachis des Blattes sitzt, demnach hier 4 Blättchen übers Kreuz gestellt erscheinen. Die Fiederchen sind nicht oder kaum gestielt, ± schmal elliptisch, spitz oder etwas zugespitzt und bespitzt, etwas wellig-gezähnt bis ganzrandig. Übrigens wechseln Größe, Teilung, Zahl der Fiedern und Fiederchen. Gesamtlänge des Blattes bis 45 cm, davon der Blattstiel bis 25 cm; Spreite bis 20 cm lang und 25 cm breit, die Blättchen der untersten Fiedern I. Ordn. sind bis 55 × 15 mm.

Blütenstand fast oder völlig unterirdisch, 2.5 cm hoch, auf ca. 4 cm hohem Stiel: dieser am Grunde umhüllt von 3 verschieden langen blassen Schuppenblättern in spiraliger Folge, davon das unterste ca. 5 mm, die beiden anderen ca. 10 mm lang, alle drei ± breit eiförmig, gehöhlt, spitz, dünn. Spatha ca. 3 cm lang, unten convolutiv mit stark übergreifenden Rändern, oben offen mit zur Seite geschlagenem Saum; der untere ca. 8 mm hohe Teil ist dünn, alles blaß bräunlich rosa, beiderseits gleichfarbig, jedoch auf der ganzen Außenseite mit sehr feinen dunkeln Punkten und Strichelchen bestreut (die indessen fehlen können); Spitze der Spatha kapuzenförmig zusammengezogen, mit etwas dicklichem abgesetztem Spitzchen von ca. 1—2 mm Länge; der freie obere Teil der Spatha ist eiförmig, gehöhlt, von Längsnerven durchzogen, deren 4 oder 6 etwas kräftiger hervortreten; der Boden des Spathakessels ist dicht mit Papillen bedeckt. Spadix 23—32 mm lang, blaßbräunlich-rosa; obere Hälfte fast zylindrisch, 6—7.5 mm dick, oben gerundet-stumpf, nach abwärts ein wenig verschmälert, durch die Blüten etwas höckerig-uneben, wobei die Spitze des rudimentären Fruchtknotens je die höchste Stelle des Höckers bildet; unter der Mitte auf 1/4 der Gesamtlänge ziemlich stark (bis auf 3.5 mm) zusammengezogen, darunter im letzten 1/4 wieder fast so dick wie oben (6—7 mm); der ganze obere Teil trägt dichtgedrängt ♂ Blüten in 4 oder 6 Längsreihen, je 4—6 übereinander in jeder Zeile und in den benachbarten Zeilen alternierend; auch der schmalere Teil des

Spadix trägt dichtgedrängte Blüten, während der unterste Teil nur 2 wagerechte Reihen von ebenfalls dichtgedrängten ♀ Blüten trägt; zwischen dem ♂ und ♀ Abschnitt des Spadix keine Lücke, auch keine Rudimente. In der ♂ Blüte sind die Staubblätter kürzer als die übrigen Blütenteile, so daß sie von außen her nicht gesehen werden und nur der Pollen aus der schmalen Spalte zwischen den Tepalen und dem Narbenkopf hervortritt.

Microculcas pteroides APeter n. spec. — S. 213, Fig. 8.

Planta quoad rhizoma, staturam, folii configurationem partitionemque simillima *M. marattioides* at gracilior, fragilior, laminae segmentis omnibus linearibus decurrentibus, usque ad 70 × 2 mm. Folium petiolo 20 cm longo incluso usque ad 37 cm longum quasi *Pteridem* imitans, petiolus ad 2—3 cm supra basin genu levi instructus. Flores desunt. — Specimina authentica P 16318.

Bemerkungen zu den Figuren.

Bei der Herstellung der Abbildungen für den Druck sind sämtliche Figuren erheblich kleiner ausgefallen als es den ihnen beigefügten Angaben entspricht.

Fig. 1 und 2 nach photographischen Aufnahmen des Verfassers;
Fig. 3 und 6 gezeichnet von Fräulein Käthe Droysen in Göttingen;
Fig. 4, 5, 7, 8 von Frau Studienrat Anneliese Ruge geb. Neumann in Kiel; die Analysen vom Verfasser.

Zur Lichtabsorption in Silber- und Kupferhalogenidkristallen.

Von

H. Fesefeldt und **Z. Gyulai.**

Vorgelegt von R. W. POHL in der Sitzung am 20. Dezember 1929.

§ 1. **Aufgabe.** Nach Untersuchungen der letzten Jahre hängen drei scheinbar recht verschiedenartige Vorgänge, nämlich lichtelektrische Leitung, Phosphoreszenz und photographischer Elementarprozeß innerlich eng zusammen.

Bei den Beobachtungen spielen u. a. die Halogenide von Silber und Kupfer eine wichtige Rolle. Die Bedeutung dieser Substanzen für den photographischen Prozeß ist allgemein bekannt. Ihre lichtelektrische Leitung ist wiederholt vor der Auffindung des lichtelektrischen Primärstroms [1]) und seiner Verknüpfung mit bestimmten optischen Eigenschaften der Kristalle Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. Silber- und kupferhaltige Phosphore und ihre charakteristischen Absorptionsspektra sind in den Arbeiten von SMAKULA, MAC MAHON, LORENZ und FORRÓ [2]) behandelt worden. In allen Fällen zeigen die beobachteten Erscheinungen eine charakteristische Abhängigkeit von der Wellenlänge des eingestrahlten Lichtes. Bei der Deutung der experimentellen Befunde ergab sich regelmäßig die Schwierigkeit, daß man über eine Vorfrage, nämlich die Gestalt des Absorptionsspektrums der benutzten Substanzen keinerlei ausreichende Kenntnis besaß. Das Absorptionsspektrum des Silberbromids war durch die Untersuchungen von SLADE und TOY [3]) an dünnen, kapillar zwischen Quarzplatten eingesaugten Schichten nur bis 360 mμ bestimmt worden. Die neueren Untersuchungen von EGGERT und seinen Mitarbeitern erstrecken sich nur bis zu 350 mμ. Das Absorptionsspektrum von Silberjodid ist

1) GUDDEN und POHL, Zs. f. Phys. **6**, 248, 1921.

2) A. SMAKULA, Zs. f. Phys. **45**, 1, 1927. A. M. MAC MAHON, ebenda **52**, 336, 1928. H. LORENZ, ebenda **46**, 558, 1928. M. FORRÓ, ebenda **56**, 235, 1929.

3) R. E. SLADE und F. C. TOY, Proc. Roy. Soc. London (A) **97**, 181, 1920.

besonders eingehend von Schell[1]) untersucht worden. Schell hat seine Silberjodidschichten durch Jodierung dünner Silberspiegel hergestellt. Die Beobachtungen Schells haben ein ausgesprochenes Absorptionsmaximum bei ca. 420 mμ ergeben. Hilsch und Pohl[2]) haben die Lage des ersten Maximums zwar bestätigen können, nicht jedoch den weiteren Verlauf des Absorptionsspektrums unterhalb 280 mμ. Seit diesen Arbeiten ist in der Herstellung dünner, für direkte Absorptionsmessungen geeigneter Kristallschichten ein wesentlicher Fortschritt erzielt. Hilsch und Pohl[3]) haben derartige Schichten durch Kondensation des Dampfes auf Quarz- und Flußspatunterlagen hergestellt und an ihnen sehr gut reproduzierbare Ergebnisse erzielt. Bei dieser Sachlage erschien es uns aussichtsreich, die Frage nach den Absorptionsspektren der Silber- und Kupferhalogenidkristalle erneut in Angriff zu nehmen.

§ 2. **Versuchsanordnung.** Die Messungen wurden mit lichtelektrischer Photometrie ausgeführt. Wegen der technischen Einzelheiten verweisen wir auf frühere Publikationen[4]). Zur Beschickung des kleinen Verdampfungsofens im Hochvakuum wurden Splitter größerer Einkristalle benutzt, die für andere Zwecke hier im Institut hergestellt waren. Das Verdampfungsschiffchen bestand aus dünnem Wolframblech. Die Reflexionsverluste wurden nur in erster Näherung ausgeschaltet und zwar durch einen Vergleich der von der Kristallschicht auf der Quarzunterlage durchgelassenen mit der von der Quarzplatte allein durchgelassenen Lichtmenge. Es lohnt einstweilen nicht die tatsächlich vorhandenen Unterschiede der Reflexionsverluste in beiden Fällen zu eliminieren.

§ 3. **Messergebnisse.** Die Meßergebnisse sind in sechs Schaubildern zusammengestellt. Sie brechen im Ultravioletten einstweilen bei 185 mμ ab. In allen sechs Spektren haben wir das erste Absorptionsmaximum durch eine Wellenlängenangabe kenntlich gemacht. Bei den drei Kupferhalogeniden und dem Silberjodid zeigen die Spektra im Gebiet der längeren Wellen einen unverkennbar übereinstimmenden Bau. Ein ganz kontinuierlicher Anstieg in Richtung kürzerer Wellen führt in allen vier Fällen zu einem unweit 400 mμ gelegenen Maximum. Bei den Kupfer-

1) C. Schell, Ann. Phys. **35**, 711, 1911; Dissertation Leipzig 1910.

2) R. Hilsch und R. W. Pohl, Zs. f. Phys. **48**. 385, 1928.

3) R. Hilsch und R. W. Pohl, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, mathem.-phys. Kl. 1929; Zs. f. Phys. **57**, 145, 1929.

4) Z. B. bei R. W. Pohl, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1926.

salzen ist die Verschiebung dieses Maximums beim Übergang vom Jodid zum Chlorid nur geringfügig. Sie beträgt im Energiemaß nur 0,3 Volt. Angesichts dieser geringfügigen Energiedifferenz möchten wir es nicht wagen, die beim Silberchlorid und -bromid beobachteten ersten Maxima mit denen der übrigen Salze in Parallele zu setzen. Der damit zwischen Silberjodid einerseits und Silberbromid und Silberchlorid andererseits gezogene Trennstrich ist auch vom kristallographischen Standpunkt nicht willkürlich: Denn die drei Kupfersalze und Silberjodid haben einen übereinstimmenden Gitterbau mit vierzähliger Symmetrie. Silberchlorid und Silberbromid hingegen zeigen bei der benutzten Beobachtungstemperatur einen Natriumchloridtyp. Ein Wechsel im Gittertyp ruft bei chemisch sonst gleichartigen Salzkristallen ganz eindeutige Änderungen im Bau des Absorptionsspektrums hervor. Das beste Beispiel ist der Übergang vom Natriumchlorid- zum Cäsiumchloridtyp. Beim Silberjodid läßt sich der Wechsel des Gittertyps bequem durch eine Temperaturerhöhung erzielen; denn Silberjodid hat bei 146° C einen Umwandlungspunkt. Er macht sich äußerlich durch einen Farbumschlag von Gelb in Orange bemerkbar, entsprechend einem sprungweisen Vorrücken der Absorptionskante um 0,25 Volt. Über die Ausmessung des Spektrums diesseits und jenseits des Umwandlungspunktes an diesen und ähnlich günstigen Beispielen wird der eine von uns (H. F.) demnächst ausführlich berichten.

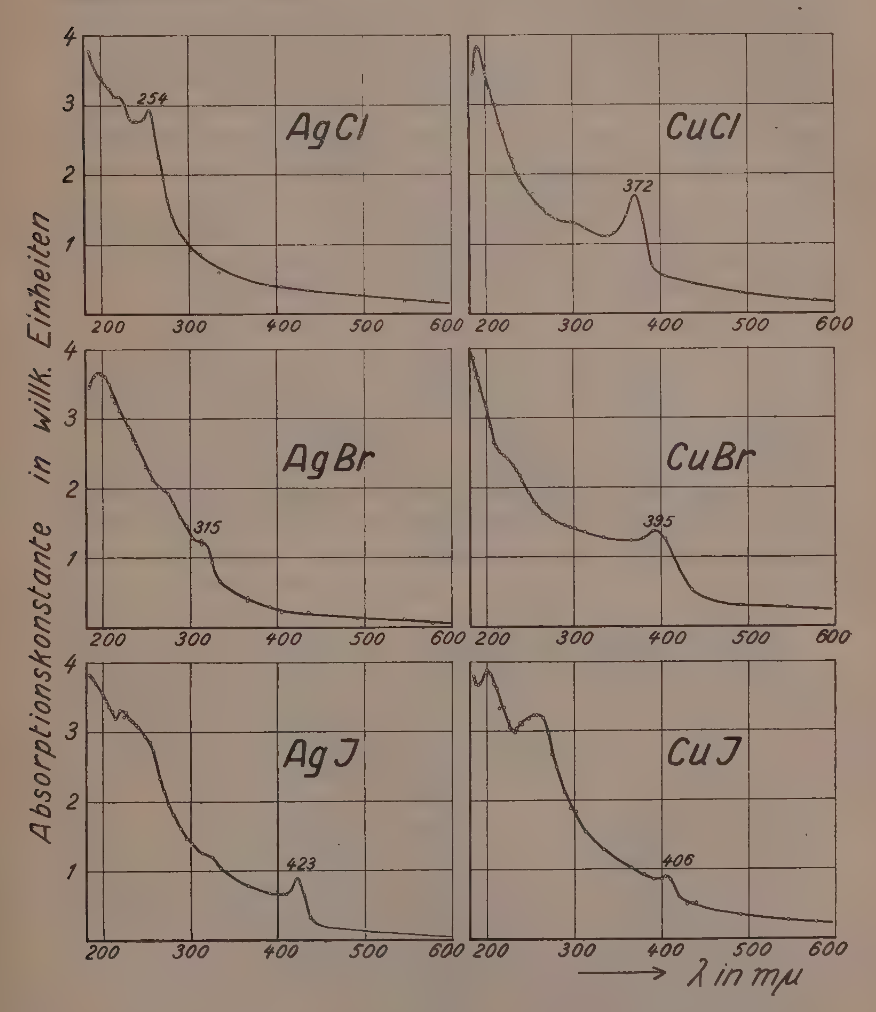
§ 4. **Diskussion.** Die nähere Diskussion der experimentell gefundenen Ergebnisse soll erst später im Zusammenhang mit im hiesigen Institut im Gang befindlichen Arbeiten gegeben werden. Hier beschränken wir uns auf drei kurze Hinweise:

1. Hilsch und Pohl[1]) hatten für thallium- und bleihaltige Alkalihalogenidphosphore eine gut übereinstimmende Lage der ersten Absorptionsbande mit der des zugesetzten Thallium- oder Bleihalogenids festgestellt. Nach unseren vorliegenden Messungen dürfen die von Hilsch und Pohl gefundenen Ergebnisse nicht verallgemeinert werden. Sie treffen für Alkalihalogenidphosphore mit Silber- und Kupferzusatz nicht mehr zu.

2. Das von Schell am Silberjodid beobachtete und auch von uns wieder einwandfrei bestätigte Maximum ist neuerdings von Fajans und Karagunis[2]) mit der Absorption freier Ag-Ionen in Zusammenhang gebracht worden. Nach unserer oben erwähnten

1) Zs. f. Phys. **48**, 385, 1928.
2) Zs. f. phys. Chem. (B) **5**, 385, 1929.

Auffassung dürfte es jedoch eher mit dem Kristallbau dieser binären Verbindung zusammenhängen. Wir glauben daß die von uns aufgefundenen analogen Maxima an den drei Kupferhalogeniden für die weitere Verfolgung der Fajansschen Auffassung brauchbar sein werden.



3. Unsere in der Tafel abgebildeten Absorptionsspektra sollen lediglich die Lage der Eigenfrequenzen und den Verlauf der Absorption in dem Spektralgebiet festlegen, in dem die Kristalle in gleicher Größenordnung wie die Metalle absorbieren. Über Höhe

und Verlauf der Absorptionskurven im Gebiete der normalen Durchlässigkeit des Kristalles kann man selbstverständlich aus den von uns benutzten Schichten (100 bis 1000 Moleküllagen) keine Schlüsse ziehen. In diesem Spektralgebiet müssen die Messungen an Kristallstücken von einigen Millimeter Dicke ausgeführt werden. Anderenfalls sind die ungleichen Verluste durch Reflexion und Streuung nicht zu eliminieren. Im Falle unserer dünnen Schichten kann man den Einfluß von Reflexion und Streuung im Gebiet langer Wellen durch ein paralleles Anheben der Abszissenachse ausschalten. Nach Eggert und Noddack[1]) liegt die „Absorptionskante“ des Silberchlorids und Silberbromids bei 400 bzw. 480 mμ, d. h. bei Schichtdicken von der Größenordnung des üblichen Plattenkorns muß unterhalb dieser Wellenlängen von praktischer Undurchlässigkeit gesprochen werden[2]). Unsere Messungen an Silberchlorid und Silberbromid stehen also nach obigen Ausführungen zu den Angaben von Eggert und Schmidt keineswegs in Widerspruch.

Zusammenfassung. Mit Hilfe lichtelektrischer Photometrie werden bei Zimmertemperatur die Absorptionsspektra der Chloride, Bromide und Jodide von Silber und Kupfer bis 185 mμ herab ermittelt. Die Spektra sind in einer Tafel zusammengestellt. Sie lassen eine deutliche Beziehung zum Kristallgitterbau erkennen.

Zum Schluß danken wir Herrn Professor R. W. Pohl für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Gastfreundschaft im hiesigen Institut und Herrn Dr. Hilsch für manche Ratschläge.

---

1) Zs. f. Phys. **20**, 299, 1923.
2) J. Eggert u. R. Schmidt, Zs. f. Phys. **48**, 541, 1928.

Erstes Physikalisches Institut der Universität Göttingen.
Dezember 1929.

Überschiebungs-, Abscherungs- und Zerrungstektonik bei der Osningfaltung.

Von

Franz Lotze, Göttingen.

(Mit 5 Abbildungen.)

Vorgelegt von H. STILLE in der Sitzung am 20. Dezember 1929.

I.

Das tektonische Großbild des Osnings ist das eines Sattels, dessen relativ gesunkener Südwestflügel aus größtenteils steilstehenden bis überkippten Schichten der Jura- und vor allem der Kreideformation besteht, dessen relativ gehobener Nordostflügel von flach gegen Norden oder Osten einfallenden Triasgesteinen gebildet wird. Die beiden Flügel grenzen aneinander längs einer Überschiebung, die, wie H. STILLE[1]) auf Grund von Tiefbohrungen bei Wistinghausen und Örlinghausen zeigen konnte, in ihrem oberen Teil sehr flach ist und geradezu an alpine Deckenüberschiebungen erinnert. Daß diese Erscheinungsform der „Osningspalte“ nicht auf dieses Gebiet beschränkt, sondern auch für die Fortsetzung des Osnings nach Südost bezw. nach Nordwest gültig sein dürfte, auch darauf wies H. STILLE nachdrücklich hin.

Ein besonderer Umstand ist nun hier von Interesse. N a c h d e r von H. STILLE ausgewerteten T i e f b o h r u n g N i e d e r b a r k h a u s e n b e t r i f f t d i e F l a c h h e i t der Überschiebung v o r a l l e m d i e h ö h e r e n T e i l e des überschobenen Schichtpakets (s. Abb. 1). So scheint der Muschelkalk, vom Buntsandstein losgelöst, besonders weit nach Westen bis jenseits der „Haßbergzone“ vorgeschoben zu sein. Etwas ähnliches scheint auch weiter im Südosten zwischen Berlebeck und Leopoldstal im Bereich der Berlebecker Achse der Fall zu sein; hier gewinnt man bereits aus dem Verlauf der

---

1) Vgl. H. STILLE, Mechanismus der Osningfaltung, Jahrb. d. Preuß. Geol. Landesanst. f. 1919, Bd. XXXI, Teil I, S. 357 ff.; H. STILLE, Die Osning-Überschiebung, Abhandl. d. Preuß. Geol. Landesanst. N. F., Heft 95, S. 32 ff.

Störungen im Gelände, wie er sich aus der geologischen Spezialkarte ergibt, den Eindruck, als ob der Muschelkalk *ohne sein Liegendes*, stellenweise auch nur der Trochitenkalk, ebenfalls *losgelöst von seinem Unterlager*, ganz flach gegen Westen auf Keuper überschoben sei, der sich hier dem Lias des gesunkenen Osningflügels anschließt.

Diese Erscheinungen weisen auf eine gewisse *Selbständigkeit* in der Bewegung einzelner Stockwerke des überschiebenden Schichtpaketes hin. Die größere Flachheit der höheren Teile der Osningüberschiebung zeigt an, daß hier die Einengung in besonderem Maße durch *horizontale Verfrachtung* bewirkt ist;

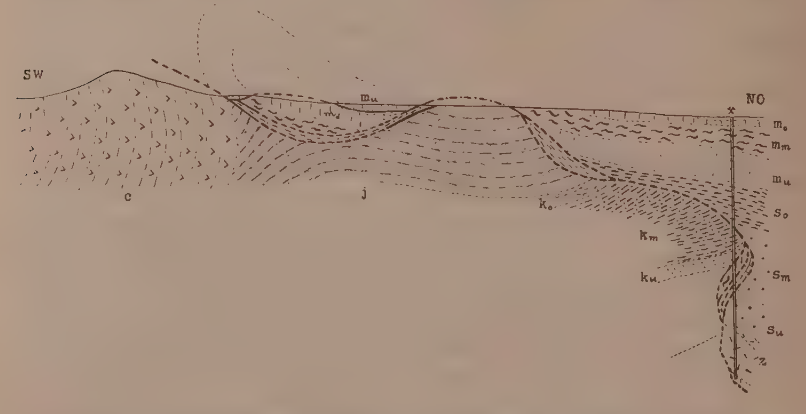


Abb. 1. Profil durch den Osning bei Örlinghausen. (Maßstab 1 : 25 000). (Nach H. Stille, Göttinger Beiträge zur saxonischen Tektonik, Abh. d. Preuß. Geol. Landesanstalt, N. F., H. 95, Tafel 5)

c = Kreide
j = Jura
ko = Rhät
km = Mittlerer Keuper
ku = Unterer Keuper
mo = Oberer Muschelkalk
mm = Mittlerer Muschelkalk
mu = Unterer Muschelkalk
so = Röt
sm = Mittlerer Buntsandstein
su = Unterer Buntsandstein
z = Zechstein

Eingetragen ist Bohrung Niederbarkhausen.

der Einengungsbetrag der tieferen Teile der Schichtfolge, der über einen größeren Raum hin quantitativ mit dem der oberen übereinstimmen muß, scheint demgegenüber durch andere tektonische Vorgänge erreicht zu werden.

Es erhebt sich die Frage nach den Bedingungen, die das Zustandekommen dieser besonderen tektonischen Reaktionsform ermöglichten.

II.

Im Vorraum des Osnings tritt im Gebiet zwischen dem Frankenberg westlich Vinsebeck und dem Bellenberg nordwestlich der Ortschaft gleichen Namens[2]) ein breiter Sattel auf, der beachtenswerte Besonderheiten zeigt. Oberer Muschelkalk, auf den sich gegen

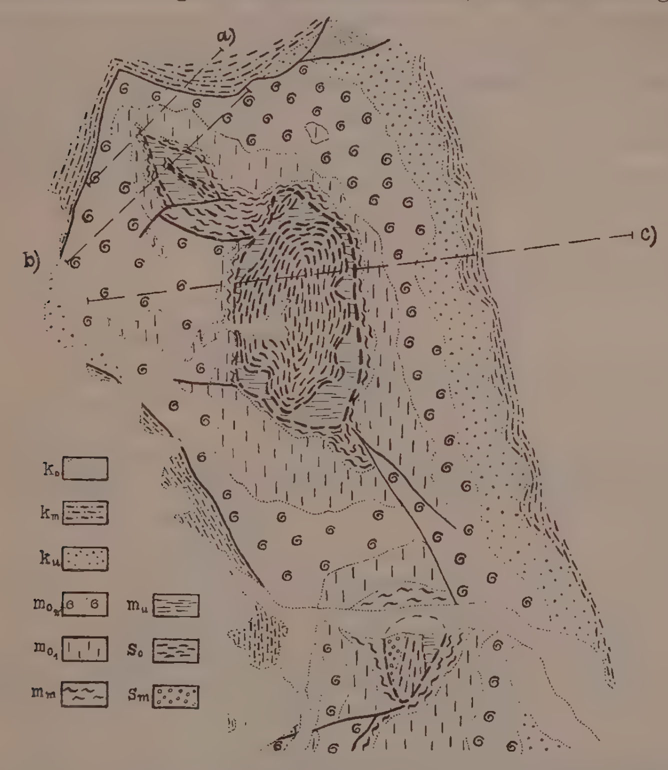


Abb. 2. Geologische Karte des Bellenbergsattels. (Maßstab 1 : 37 500).

ko = Rhät
km = Mittlerer Keuper
ku = Unterer Keuper
mo_2 = Tonplatten
mo_1 = Trochitenkalk
mm = Mittlerer Muschelkalk
mu = Unterer Muschelkalk
so = Röt
sm = Mittlerer Buntsandstein
a), b), c) = Profillinien
einfache starke Linien: Verwerfungen; unterbrochene starke Linien: Abscherungen.

Osten in regelmäßiger Folge Keuper legt, bildet ein nicht von wesentlichen Verwerfungen betroffenes Gewölbe, das in drei Einzelkernen (nordwestlich von Vinsebeck, bei der Ortschaft Bellenberg

2) Siehe die Blätter Steinheim und Horn-Sandebeck der geolog. Karte von Preußen 1 : 25 000.

und nordwestlich von letzterer) besonders stark aufgesattelt ist (Abb. 2 und 3). An diesen durch die Erosion aufgebrochenen Stellen des Sattels schaut man in das Gewölbeinnere hinein. Hier erscheint unter dem Trochitenkalk zunächst in normalem Unterlager Mittlerer Muschelkalk, unter dem unmittelbar tiefere Teile des Wellenkalks folgen[3]). Ein Teil des Mittleren Muschelkalks und ein Teil des Wellenkalks fehlen, und zwar infolge einer Störung, die besonders im Inneren des Bellenberg-Gewölbes längs einer den Konturen des Trochitenkalks sich anschmiegenden Linie ausstreicht und somit eine ähnliche geometrische Form zu haben scheint wie die Unterfläche des Trochitenkalks selbst[4]). Da diese Störung in

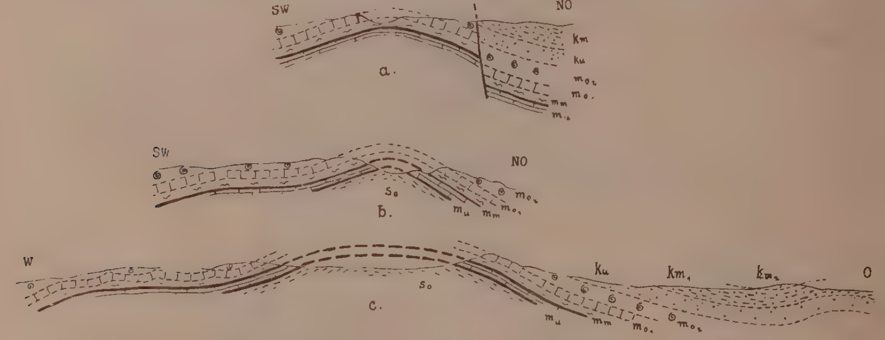


Abb. 3. **Profile durch den Bellenbergsattel.** (Maßstab 1 : 25 000).
Nicht überhöht. Signaturen wie in Abb. 2.
Die Lage der Profile ist aus Abb. 2 ersichtlich.

allen drei Sattelkernen der Achsenzone in gleicher Weise im Niveau des Mittleren Muschelkalks angetroffen wird, ist anzunehmen, daß sie auch im Raum zwischen den Spezialaufwölbungen vorhanden ist, hier aber unter der unverletzten Trochitenkalkdecke verborgen bleibt. Aus dem Gesamtbilde ergibt sich, daß die Störung den Charakter einer Abscherung besitzt, die auf eine horizontale Bewegung des festen Trochitenkalks relativ zum Wellenkalk längs des die Schichtpakete trennenden weniger festen Mittleren Muschelkalks zurückgeht.

Unter dem Wellenkalk tritt im innersten Teil der Sattelkerne

3) An einigen wenigen Stellen fehlt auch der ganze Wellenkalk, so örtlich auf der Westseite des Bellenbergsattels und im Vinsebecker Sattelkern.

4) Untergeordnet mögen geringe Sprünge hinzukommen, die diese flache Störung selbst wieder etwas verwerfen. Das mag z. B. der Fall sein nordwestlich der Ortschaft Bellenberg und im Vinsebecker Sattelkern.

Röt auf. Auf den geologischen Kartenblättern Steinheim und Horn-Sandebeck ist die Wellenkalk-Röt-Grenze als normale Schichtgrenze dargestellt. Ich möchte es aber für sehr wahrscheinlich halten, daß auch sie eine Störung von ähnlichem Charakter wie diejenige an der Oberkante des Wellenkalks ist. Widersinniges Einfallen im Wellenkalk nordöstlich der Ortschaft Bellenberg scheint mir darauf hinzuweisen[5]).

So möchte ich eine zweite Abscherung zwischen Wellenkalk und Buntsandstein für wahrscheinlich halten, die den weichen Schichten des Röt folgt. Die starke Reduktion der Mächtigkeit des Unteren Muschelkalks, der gelegentlich sogar ganz ausgemerzt ist, würde sich aus seiner Lage zwischen zwei Hauptbewegungsflächen erklären[6]).

III.

Der Sattelzug Vinsebeck—Bellenberg gehört in das System der Osningfalten, denen er sich im Streichen einpaßt[7]). So deutet sich die Knickung, die der Osning bei Leopoldstal zeigt, auch im Verlauf dieser Sattelzone an, die bei Bellenberg aus süd-nördlicher Richtung in südost-nordwestliche umbiegt. Auch die Abscherdecken des Bellenberges müssen, da ihr durchschnittliches Streichen dem der Osningüberschiebung parallel geht, mit der Entstehung der letzteren in Beziehung stehen.

Wie nun oben gezeigt wurde, verlangen die besonderen Erscheinungen, welche die Osningüberschiebung aufweist, freie Bewegung der einzelnen Stockwerke der überschiebenden Schichtfolge aneinander. Die tektonischen Verhältnisse des Bellenberges weisen ebenfalls auf freie Beweglichkeit der einzelnen, und zwar der gleichen Stockwerke hin. Bei dieser Sachlage liegt es nahe, die

5) Auf meine Anregung hin hat sich Herr Jost Krekeler mit dieser Frage noch weiter beschäftigt und versucht, die Verhältnisse durch Schürfe zu klären. Zwar ließ sich wegen zu starker Schuttbedeckung die Röt-Wellenkalkgrenze selbst nicht aufschließen, aber die Erscheinungsform des tieferen Wellenkalks scheint auch Herrn Krekeler nicht für normalen Verband zu sprechen. Ich danke Herrn Krekeler bestens für die diesbezüglichen Mitteilungen.

6) Daß der Röt einen zu Abscherungen neigenden Horizont darstellt, geht auch aus Untersuchungen F. E. Klingner's im Gebiet des mittleren Leinetals und aus solchen K. H. Klohn's im Bereich des Eichenberg-Gothaer Grabens hervor (vgl. H. Stille, Göttinger Beiträge zur saxonischen Tektonik II, Abhandl. d. Preuß. Geol. Landesanst., Heft 116).

7) H. Stille sieht in ihm die Fortsetzung der eigentlichen „Osningachse" (vgl. Übersichtskarte der saxonischen Gebirgsbildung zwischen Vogelsberg-Rhön und der norddeutschen Tiefebene, 1 : 250 000).

Abscherdecken des Bellenberges in unmittelbaren Zusammenhang mit den einzelnen Überschiebungspaketen des Osnings zu bringen (s. Abb. 4 b).

Wir fassen die Entstehung dieses tektonischen Bildes folgendermaßen auf. Unter tektonischer Schubbewegung aus nordöstlicher bis ostnordöstlicher Richtung entstand in Richtung des heutigen Osnings, dem Rand der Rheinischen Masse folgend, eine Aufwölbung und Überschiebung der Triasschichten gegen Südwesten auf Jura und Kreide (Abb. 4 a). Für die höheren Teile des triadischen Schichtpaketes war wegen der größeren Nähe der Erdoberfläche leichtere Möglichkeit horizontalen seitlichen Ausweichens gegeben, während die tieferen Teile der Schichtfolge schwerer überschiebbar

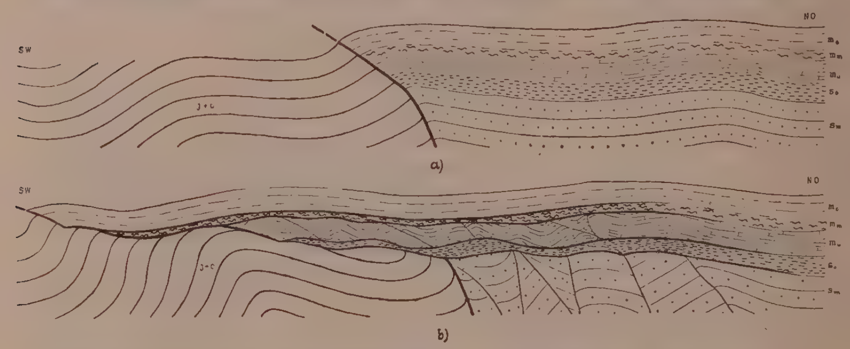


Abb. 4. Schematische Profile zur Erläuterung der Entstehung der Überschiebungs- und Abscherungsdecken des Osnings.
a) „Anfangsstadium“: Steile Überschiebung.
b) „Endstadium“: Überschiebung durch Abscherung verflacht.
Signaturen wie in Abb. 1.

waren. Bei dieser Sachlage lösten sich die Schichtpakete längs der weniger widerstandsfähigen Zwischenschichten unter dem tektonischen Schub von einander ab, die Schichtfolge blätterte sozusagen auf, und die einzelnen selbständigen Schichtblätter schoben sich, dem verschiedenen Grade ihrer Überschiebbarkeit entsprechend, verschieden weit gegen Südwest vor (Abb. 4b). Hierdurch entstanden im Vorraum der „Osningspalte“ flache Abscherungen, im Bereich der „Osningspalte“ selbst flache Aufschiebungen[8]). Es ist anzunehmen, daß in größerem Abstand von der Osningüber-

8) In der sehr schematischen Abb. 4 sind zwei Stadien der Entwicklung der Osningüberschiebung unterschieden. Es ist anzumerken, daß man sich die Entwicklung kontinuierlich zu denken hat.

schiebung die einzelnen Blätter im Zusammenhang geblieben sind, sodaß sich die relativen Verschiebungsbeträge zwischen je zweien von der Osningspalte aus gegen Nordosten kontinuierlich verringern (Abb. 4b). Zur Ausgleichung des Einengungsbetrages der höheren und tieferen Teile der Schichtfolge möchte man für die letzteren stärkere Faltung annehmen, wie das in Abb. 4b sehr schematisch verdeutlicht ist[9]).

IV.

Die große Triastafel im Nordosten und Osten des Teutoburger Waldes wird von einem Grabensystem durchfurcht, das aus der Gegend von Oeynhausen (Blatt Steinheim) bis über die Weser hinaus mit etwa ostnordöstlichem Streichen durchzieht und aus mehreren, zumeist mit Lias gefüllten Einzelgräben besteht. Aufschlüsse in den mittleren Teilen dieser Grabenzone auf Blatt Schwalenberg zeigen an, daß die Randsprünge normal einfallen, und zwar im allgemeinen unter etwa 40°. Das tektonische Gesamtbild weist auf Zerrung hin, und auch auf Blatt Steinheim prägt sich in allen kleintektonischen Erscheinungen an den Grabenrändern Zerrungstendenz aus. Nur in dem östlichsten Teil der Grabenzone wie auch an den Ostendigungen der verschiedenen Einzelgräben auf Blatt Schwalenberg sind Pressungserscheinungen zu beobachten, die der Grabenrichtung folgen. Aber diese in weiterer Entfernung des Osnings auftretenden Erscheinungen gehen, wie andernorts gezeigt werden wird, auf Sonderverhältnisse zurück und stehen nicht mehr in unmittelbarem Zusammenhang mit der Osningfaltung. Für das vorliegende Problem ist allein bedeutsam, daß im engeren Wirkungsfeld der Osningfaltung mit der Richtung des Falkenhagener Grabensystems, d. h. mit ostnordöstlicher Richtung, jedenfalls Zerrung verbunden ist.

In welcher Beziehung steht diese Erscheinung zur Pressungstektonik des Osnings?

V.

Für diese Frage sind zwei Umstände von Wichtigkeit. Erstens steht die Richtung der Grabenzone sozusagen senkrecht zur Richtung des Verlaufs der Osningfalten im Gebiete der Blätter Horn-

9) Hierbei werden in dem starren Buntsandstein Brüche gewiß eine erhebliche Rolle spielen. Auch die hohe Aufwölbung von Mittlerem Buntsandstein im Vinseb cker Sattelkern möchte ich auf eine solche verstärkte Bruchfaltentektonik im Untergrund der Abscherungsdecken zurückführen.

Sandebeck und Steinheim[10]), und zweitens strahlt das Grabensystem auf eine Stelle des Faltensystems zu, wo dieses aus der nordwestlichen Richtung, die es längs sehr langer Front streng innehält, bei Leopoldstal in eine annähernd nordsüdliche Richtung umbiegt (Abb. 5).

Diese beiden Umstände charakterisieren das Falkenhagener Grabensystem als ein System großer Radialklüfte, die in Richtung des Schubes senkrecht zur Faltung aufrissen und die ihrem mechanischen Verhalten nach in die Kategorie der Q-Klüfte CLOOS' gehören. Ihre Entstehung führe ich auf die besonderen Zugspannungen zurück, die in der an der Knickstelle der Osningfalten auf Biegung beanspruchten Zone der Triasscholle des Osningvorlandes auftraten.



Abb. 5. Übersichtskarte zur Veranschaulichung der Beziehungen zwischen Falkenhagener Grabenzone und Osningfalten. (Maßstab 1 : 750 000).
(Nach H. STILLE, Übersichtskarte der saxonischen Gebirgsbildung).
Schraffiert: Außenrand der westfälischen Kreidemulde.
Starke Linien: Faltenachsen; schwächere Linien: Verwerfungen.
Punktierte Flächen: Lias im Bereich des Falkenhagener Grabensystems und des Beller Grabens.

10) Vgl. auch MESTWERDT, „Über Störungen am Falkenhagener Liasgraben". A. v. KOENEN-Festschrift, S. 221 ff. Stuttgart 1907.

VI. Zusammenfassung.

Die vorstehende Skizze gibt eine Vorstellung von der Kompliziertheit des tektonischen Geschehens bei der Osningfaltung. Doch lassen sich die beobachtbaren Erscheinungen in ein einheitliches Bewegungsbild fassen, das sich folgendermaßen darstellt.

Im Vorlande der Rheinischen Masse stauten sich unter von Nordosten bis Osten wirkendem Schub in der Linie des heutigen Osnings die Gesteinsmassen und wurden großenteils längs langer Überschiebungen, die sich aus Sätteln entwickelten, gegen Südwest vorbewegt. Hierbei trat eine Aufblätterung der Schichtfolge in einzelne übereinander liegende, von einander durch Gleitflächen getrennte, selbständige tektonische Einheiten ein, von denen die höheren weiter gegen Südwest vorgeschoben, die tieferen stärker gefaltet wurden. Gleichzeitig zerbarst die Triasscholle, in einer Biegungszone auf Zug beansprucht, in radialer Richtung. Durch schwaches Auseinanderrücken der Teilschollen entstand das Falkenhagener Grabensystem, dessen Aufreißen also durch die Besonderheit der durch den tektonischen Schub zur Auslösung gebrachten Schollenbewegungen bedingt ist.

Die betrachteten Überschiebungs-, Abscherungs- und Zerrungserscheinungen gehören somit einem einheitlichen tektonischen Vorgang an und sind demgemäß gleichaltrig. Aus den Altersverhältnissen der Faltung in Egge und Osning ist zu schließen, daß sich diese Vorgänge auf zwei große Phasen, eine prä- und eine postkretazische, verteilen.

Über vollständig reduzible Ringe und ihre Unterringe.

Von

Jakob Levitzki in Tel-Aviv.

Vorgelegt in der Sitzung am 20. Dezember 1929.

In ihrer Vorlesung vom Wintersemester 1927/28 über hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie[1]), zeigte Fräulein E. NOETHER, wie sich die Theorie der Gruppendarstellung von FROBENIUS rein arithmetisch (gruppen- und ringtheoretisch) aufbauen läßt. Diese Theorie erscheint da als Spezialfall einer allgemeinen Theorie der nichtkommutativen Ringe, in welchen der Doppelkettensatz gilt und die ohne Radikal sind. Bildet man nämlich das hyperkomplexe System einer Gruppe über einem (kommutativen) Körper, so erhält man einen Ring mit obigen Eigenschaften. Die Betrachtung der Gruppencharaktere wird dabei zurückgeführt auf die Betrachtung des Zentrums, dessen Zerfällung in eine direkte Summe von (kommutativen) Körpern die verschiedenen Darstellungsklassen (zweiseitig-einfachen Ideale) charakterisiert.

Gehen wir jetzt zu der FROBENIUSschen Abhandlung „Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen“ über. Ist eine irreduzible Darstellung Δ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben, so vermittelt diese Darstellung Δ auch eine solche von einer jeden Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Die Darstellung Δ für $\mathfrak{H}$ braucht natürlich nicht irreduzibel zu sein. Die Charaktere von $\mathfrak{H}$ in Δ lassen sich nun linear (mit ganzzahligen Koeffizienten) durch die irreduziblen Charaktere der in Δ vertretenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ ausdrücken. Umgekehrt, definiert jede irreduzible Darstellung Δ' von $\mathfrak{H}$ eine, im allgemeinen nicht irreduzible Darstellung D von $\mathfrak{G}$. D wird als die durch Δ' erzeugte imprimitive Darstellung von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Drückt man alle D durch irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$ aus.

1) Erschienen unter gleichem Titel, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 641—692. Die Terminologie der folgenden Note ist, soweit sie nicht erklärt ist, dieser Arbeit entnommen.

so wird das Koeffizientenschema dasselbe wie oben bei den Δ, nur gespiegelt. Die Charaktere von $\mathfrak{H}$ in Δ' lassen sich weiter durch die irreduziblen Charaktere der in D vertretenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ linear, mit rationalen Koeffizienten, ausdrücken.

Diese Beziehungen lassen sich nun auch ringtheoretisch deuten und ableiten. Bei ihrer Herleitung zeigt es sich aber, daß der Gruppenring keine ausgezeichnete Rolle spielt. Es handelt sich, allgemein gesprochen, um die Beziehungen eines vollständig reduziblen Ringes zu seinen vollständig reduziblen Unterringen. Im folgenden wird die eben formulierte Frage behandelt[1]).

Vorerst betrachte ich allgemeine vollständig reduzible Ringe und ihre allgemeinen vollständig reduziblen Unterringe. Einem jeden solchen Unterring ordne ich ein System von „charakteristischen Zahlen" (Längen, Indizes) zu, die für alle äquivalenten Unterringe[2]) die gleichen, also Klasseninvarianten sind. Die Längen und die Indizes werden dabei folgendermaßen definiert: Unter der Länge eines zweiseitig einfachen Ideals $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ versteht man die Anzahl n der einfachen Rechts- oder Linksideale, in deren direkte Summe $\mathfrak{A}$ zerfällt. Es sei ferner $\bar{\mathfrak{O}}$ ein vollständig reduzibler Unterring von $\mathfrak{O}$, es sei $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$ ein zweiseitig einfaches Ideal von $\bar{\mathfrak{O}}$ mit der Länge $\bar{n}_\lambda$ und $\bar{\mathfrak{r}}^\lambda$ (resp. $\bar{\mathfrak{l}}^\lambda$) ein beliebiges einfaches Rechtsideal (resp. Linksideal) von $\bar{\mathfrak{O}}$. Schließlich sei $\mathfrak{O}_\nu$ ein beliebiges zweiseitig einfaches Ideal von $\mathfrak{O}$. Wir bilden das Rechtsideal $\bar{\mathfrak{r}}^\lambda . \mathfrak{O}_\nu$ (resp. das Linksideal $\mathfrak{O}_\nu . \bar{\mathfrak{l}}^\lambda$). Dann ist die Anzahl der einfachen Rechtskomponenten von $\bar{\mathfrak{r}}^\lambda . \mathfrak{O}_\nu$ für ein beliebiges $\bar{\mathfrak{r}}^\lambda$ stets dieselbe, und gleich der Komponentenanzahl von $\mathfrak{O}_\nu . \bar{\mathfrak{l}}^\lambda$. Diese Anzahl, die wir mit $j_{\lambda\nu}$ bezeichnen, heißt der Index von $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$ in $\mathfrak{O}_\nu$. Die Zahlen

$$n_\nu,\ \nu = 1, \dots r; \quad \bar{n}_\lambda,\ \lambda = 1, \dots \bar{r}; \quad j_{\lambda\nu},\ \lambda = 1, \dots \bar{r};\ \nu = 1, \dots r$$

(wo r und $\bar{r}$ entsprechend die Anzahlen der zweiseitig einfachen Komponenten von $\mathfrak{O}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ bedeuten) heißen die charakteristischen Zahlen des Unterringes $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\mathfrak{O}$. Diese Zahlen sind durch die Relationen

$$\text{I} \qquad n_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} \bar{n}_\lambda j_{\lambda\nu}, \qquad \nu = 1, \dots r$$

miteinander verknüpft.

---

1) Eine ausführliche Darstellung wird demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinen.

2) Zwei Unterringe heißen „äquivalent", gehören zur selben Klasse, wenn sie durch Transformation mit regulären Elementen aus einander hervorgehen.

Von jetzt an beschränken wir uns auf vollständig reduzible Ringe und Unterringe mit demselben gemeinsamen Automorphismenkörper. Ein vollständig reduzibler Ring $\mathfrak{O}$ heißt dabei von gemeinsamem Automorphismenkörper, falls die Automorphismenkörper der zweiseitig einfachen Komponenten einander isomorph sind.

Beispiele dafür sind die hyperkomplexen Systeme über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und ihre Untersysteme über demselben Körper; speziell die hyperkomplexen Systeme von Gruppen und ihren Untergruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

In diesem Fall läßt sich jede Unterringsklasse vollkommen durch ihr charakteristisches Zahlensystem charakterisieren: zwei Unterringe mit denselben charakteristischen Zahlen gehören derselben Unterringsklasse an. Es wird ferner durch Konstruktion der folgende Existenzsatz bewiesen: Jedes ganzzahlig positive Lösungssystem der Gleichungen I (bei festen r, n_ν, $\nu = 1, \ldots r$) definiert — nach dem vorhergehenden eindeutig — eine Unterringsklasse. Daraus ersieht man, daß die Klassenzahl endlich ist. Unter den Unterringsklassen spielen eine besondere Rolle die Darstellungsunterringsklassen: Ist der Ring $\mathfrak{O}$ ein endlicher, direkter Modul über dem Unterring $\bar{\mathfrak{O}}$ — d. h. gibt es eine Basis $B_1, \ldots, B_m$ von $\mathfrak{O}$, sodaß sich jedes Element eindeutig in der Form $B_1 \bar{a}_1 + \cdots + B_m \bar{a}_m$ mit $\bar{a}_i$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ darstellen läßt —, so heißt $\bar{\mathfrak{O}}$ ein Darstellungsunterring von $\mathfrak{O}$. Die Basiszahl m von $\mathfrak{O}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ (die unabhängig ist von der Wahl der Basis) heißt der Darstellungsindex von $\mathfrak{O}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$. Die charakteristischen Zahlen und der Darstellungsindex sind durch das Gleichungssystem

$$\text{II} \qquad m \bar{n}_\lambda = \sum_{\nu=1}^{r} j_{\lambda\nu} n_\nu, \qquad \lambda = 1, \ldots r$$

verknüpft. Auch für diese Klassen ergibt sich ein Eindeutigkeits- und Existenzsatz: Jede Lösung von I und II definiert eindeutig eine Darstellungsunterringsklasse. Unter den Darstellungsunterringen werden ferner die normalen betrachtet: Ein Darstellungsunterring $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\mathfrak{O}$ heißt ein normaler Unterring, falls es mindestens ein Basissystem von $\mathfrak{O}$ inbezug auf $\bar{\mathfrak{O}}$ gibt, dessen Elemente B_σ, $\sigma = 1, \ldots m$ regulär und mit $\bar{\mathfrak{O}}$ vertauschbar sind: $B_\sigma . \bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{O}} . B_\sigma$ oder $B_\sigma^{-1} \bar{\mathfrak{O}} B_\sigma = \bar{\mathfrak{O}}$. Unter den Konjugierten eines $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$ werden die verschiedenen unter $B_\sigma^{-1} \bar{\mathfrak{O}}^\lambda B_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots m$ verstanden. Neben $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$ ist auch jeder Konjugierte eine einfache Komponente von $\bar{\mathfrak{O}}$, also gleich einem $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$. Teilt man die $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$ in Kom-

plexe von unter sich konjugierten ein, und bezeichnen

$$\mathfrak{A}_i = \bar{\mathfrak{O}}_i^1 + \cdots + \bar{\mathfrak{O}}_i^{\varrho_i}$$

jeweils die Summe über alle $\bar{\mathfrak{O}}^\lambda$ eines solchen Komplexes, also $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_\varrho$, so ist $\mathfrak{A}_i\mathfrak{O} = \mathfrak{O}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{C}_i$ und es ergibt sich auf diese Art eine zweiseitige Zerlegung von $\mathfrak{O}: \mathfrak{O} = \sum \mathfrak{C}_i$. Zugleich ist $\mathfrak{A}_i$ normal in $\mathfrak{C}_i$; der Darstellungsindex ist für alle $\mathfrak{A}_i$ in $\mathfrak{C}_i$ gleich dem Darstellungsindex von $\mathfrak{O}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$. Daraus gewinnt man folgende Beziehungen zwischen den charakteristischen Zahlen und dem Darstellungsindex: Man kann die Komponenten $\bar{\mathfrak{O}}^1, \ldots, \bar{\mathfrak{O}}^{\bar{r}}$ so in Komplexe einteilen, daß erfüllt ist:

III $\begin{cases} j_{\lambda\nu} = j_{\lambda'\nu}, \quad \nu = 1, \ldots r, \\ \bar{n}_\lambda = \bar{n}_{\lambda'} \qquad (\lambda \text{ und } \lambda' \text{ gehören demselben Komplex an}). \\ \text{Für jedes } \nu \text{ ist mindestens einer der Indizes } j_{\lambda\nu}, j_{\lambda'\nu} \text{ gleich} \\ \text{Null, wenn } \lambda \text{ und } \lambda' \text{ zu verschiedenen Komplexen gehören.} \end{cases}$

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Unterring $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\mathfrak{O}$ normal ist, ist neben I und II das Bestehen der Bedingung III. Zu jedem Lösungssystem von Zahlen

$$\bar{r}, \bar{n}_\lambda, \quad \lambda = 1, \ldots \bar{r}; \quad j_{\lambda\nu}, \quad \lambda = 1, \ldots \bar{r}, \ \nu = 1, \ldots r$$

läßt sich eindeutig eine normale Unterringsklasse angeben, die diese Zahlen als ihre charakteristischen besitzt.

Weiter werden die Darstellungen des Oberringes $\mathfrak{O}$ in Beziehung mit den Darstellungen des Unterringes $\bar{\mathfrak{O}}$ gebracht. Zunächst lassen wir die Bedingung: gemeinsamer Automorphismenkörper fallen. Es sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges zweiseitig einfaches Ideal von $\mathfrak{O}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ ein zweiseitig einfaches Ideal von $\bar{\mathfrak{O}}$. Wir betrachten das Linksideal $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$. Dieses erzeugt wie jedes Linksideal eine Darstellungsklasse von $\mathfrak{O}$ in den Automorphismenringen von $\mathfrak{O}$. Diese Darstellungsklasse nennt man die durch $\bar{\mathfrak{A}}$ erzeugte imprimitive Darstellungsklasse von $\mathfrak{O}$. Gehen wir umgekehrt von irgend einem zweiseitig einfachen Ideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ aus, so definiert dieses eine Darstellungsklasse von $\mathfrak{O}$. Insbesondere wird dadurch auch der Unterring $\bar{\mathfrak{O}}$ dargestellt. Diese Darstellung von $\bar{\mathfrak{O}}$ heißt die durch $\mathfrak{A}$ induzierte Darstellung von $\bar{\mathfrak{O}}$. Macht man wie früher die Einschränkung: derselbe gemeinsame Automorphismenkörper für $\mathfrak{O}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$, so gilt: Kommt in der durch $\bar{\mathfrak{A}}$ erzeugten imprimitiven Darstellung $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{O}$ die (irreduzible) Klasse von $\mathfrak{A}$ $j$mal vor, so kommt in der durch $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{A}$ induzierten Darstellung von $\bar{\mathfrak{O}}$ die Klasse von $\bar{\mathfrak{l}}$ aus $\bar{\mathfrak{A}}$ auch $j$mal vor ($\bar{\mathfrak{l}}$ und $\mathfrak{r}$ einfach und j Index von $\bar{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{A}$). Ist dann $\bar{\mathfrak{O}}$ speziell

ein Darstellungsunterring von $\mathfrak{D}$, so läßt sich die durch $\bar{\mathfrak{A}}$ erzeugte imprimitive Darstellung von $\mathfrak{A}$ auch so erzeugen: Es sei

$$\mathfrak{D} = B_1 \bar{\mathfrak{D}} + \cdots + B_m \bar{\mathfrak{D}}.$$

Dann ist $\mathfrak{D}\bar{\mathfrak{A}} = B_1 \bar{\mathfrak{A}} + \cdots + B_m \bar{\mathfrak{A}}$ ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{D}$ in $\bar{\mathfrak{A}}$. Jedem Element von $\mathfrak{D}$ entspricht eine Matrix aus Elementen von $\bar{\mathfrak{A}}$. Ersetzt man diese Elemente durch Matrizen die ihnen in der Darstellung von $\bar{\mathfrak{A}}$ in K entsprechen, so erhält man die durch $\bar{\mathfrak{A}}$ erzeugte imprimitive Darstellung von $\mathfrak{D}$ in K. Ist K ein kommutativer Körper (also $\mathfrak{D}$ und $\bar{\mathfrak{D}}$ hyperkomplex über K) so gewinnt man durch diese beiden Arten der Berechnung der imprimitiven Darstellung in Verbindung mit der oben auseinander gesetzten Beziehung zwischen der imprimitiven und der induzierten Darstellung eine Beziehung zwischen den Charakteren von $\mathfrak{D}$ zu denen von $\bar{\mathfrak{D}}$. Die Formeln lauten genau so wie bei Artin (Über eine neue Art von L-Reihen, Hamb. Abh. III). Geht man zu Gruppenringen über, so gewinnt man die etwas ausführlicheren Formeln von Frobenius.

Es sei noch bemerkt, daß im Fall des Gruppenrings alle Untergruppen zu Darstellungsunterringen führen, alle Normalteiler zu normalen Unterringen. Die Formeln I, II, III finden sich für diesen Fall schon bei Frobenius; von den zugehörigen Existenz- und Eindeutigkeitssätzen findet sich noch nichts.